线性代数
第四章：行列式

宿州学院　数学与统计学院

目录

4.1 n阶方阵的行列式

利用矩阵初等行变换给出了线性方程组的高斯消元法；利用矩阵的秩等概念讨论了线性方程组有解的判定条件；利用向量空间描述了线性方程组解的结构.

4.1 n阶方阵的行列式

利用矩阵初等行变换给出了线性方程组的高斯消元法；利用矩阵的秩等概念讨论了线性方程组有解的判定条件；利用向量空间描述了线性方程组解的结构. 本章将引入行列式这一数学工具，并用此工具讨论方程组的相关结论.

4.1 n阶方阵的行列式

利用矩阵初等行变换给出了线性方程组的高斯消元法；利用矩阵的秩等概念讨论了线性方程组有解的判定条件；利用向量空间描述了线性方程组解的结构. 本章将引入行列式这一数学工具，并用此工具讨论方程组的相关结论.

定义4.1 设$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 是一个$n \times n$阶方阵.

A的行列式就是A 对应的一个数，记作$\det A$ 或$|A|$ ，且满足如下性质：

(1)规范性.单位矩阵对应着数1，即$\det I_n = 1, |I_n| = 1$；

(2)反对称性.交换行列式的两行，行列式变号.即，交换矩阵A的任意两行，得到矩阵B，则$\det A = -\det B$ ；

4.1 n阶方阵的行列式

(3)线性性质.将矩阵A的某一行乘数k 得到矩阵B，则$\det B = k\det A$；

若矩阵A的某一行(比如第i行)是

$(b_{i1}+c_{i1} \quad b_{i2}+c_{i2} \quad \cdots \quad b_{in}+c_{in})$，则$\det A =$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

4.1 n阶方阵的行列式

满足规范性、反对称性和线性性质的数由方阵A唯一确定的。称这个数为**方阵A 的行列式**.

4.1 n阶方阵的行列式

满足规范性、反对称性和线性性质的数由方阵A唯一确定的。称这个数为方阵A 的行列式.

需要特别解释的是：线性性质有两条，

第一条，行列式的某一行的公因数可以提取到行列式的符号外；

第二条，若其第i 行$(a_{i1} \ \ a_{i2} \ \ \cdots \ \ a_{in})$ 写成了相应的和形式$(b_{i1}+c_{i1} \ \ b_{i2}+c_{i2} \ \ \cdots \ \ b_{in}+c_{in})$，则行列式可以写成两个行列式之和，其中一个行列式的第i 行取$(b_{i1} \ \ b_{i2} \ \ \cdots \ \ b_{in})$ ，另一个行列式的第i 行取$(c_{i1} \ \ c_{i2} \ \ \cdots \ \ c_{in})$ ，而其余各行的元素保持不变.

4.1 n阶方阵的行列式

利用矩阵的初等变换与初等矩阵之间的关系，行列式的某些性质可以表述为：

4.1 n阶方阵的行列式

利用矩阵的初等变换与初等矩阵之间的关系，行列式的某些性质可以表述为：

反对称性. $\det(P(i,j)A) = -\det A$;

4.1 n阶方阵的行列式

利用矩阵的初等变换与初等矩阵之间的关系，行列式的某些性质可以表述为：

反对称性. $\det(P(i,j)A) = -\det A$；

线性性质. $\det(P(i(k))A) = k\det A$.

4.1 n阶方阵的行列式

利用矩阵的初等变换与初等矩阵之间的关系，行列式的某些性质可以表述为：

反对称性. $\det(P(i,j)A) = -\det A$;

线性性质. $\det(P(i(k))A) = k\det A$.

性质4.1 对角矩阵的行列式等于对角元素之积.即

$$\det\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n.$$

4.1 n阶方阵的行列式

利用矩阵的初等变换与初等矩阵之间的关系，行列式的某些性质可以表述为：

反对称性. $\det(P(i,j)A) = -\det A$;

线性性质. $\det(P(i(k))A) = k\det A$.

性质4.1 对角矩阵的行列式等于对角元素之积.即

$$\det\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n.$$

这是因为：若对角元素中有元素0，则这一行有公因数0 ，

4.1 n阶方阵的行列式

利用矩阵的初等变换与初等矩阵之间的关系，行列式的某些性质可以表述为：

反对称性. $\det(P(i,j)A) = -\det A$；

线性性质. $\det(P(i(k))A) = k\det A$.

性质4.1 对角矩阵的行列式等于对角元素之积.即

$$\det\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n.$$

这是因为：若对角元素中有元素0，则这一行有公因数0 ，由行列式的线性性质，公因数可以提取到行列式符号外，行列式的值为0 ，等于对角元素之积；

4.1 n阶方阵的行列式

若对角阵的对角元素都非零，利用行列式的线性性质，将每一行的公因数(即每一行的对角元)提取到行列式的符号外，

4.1 n阶方阵的行列式

若对角阵的对角元素都非零，利用行列式的线性性质，将每一行的公因数(即每一行的对角元)提取到行列式的符号外，则

$$\det\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

4.1 n阶方阵的行列式

若对角阵的对角元素都非零，利用行列式的线性性质，将每一行的公因数(即每一行的对角元)提取到行列式的符号外，则

$$\det\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= d_1 d_2 \cdots d_n$$

4.1 n阶方阵的行列式

若对角阵的对角元素都非零，利用行列式的线性性质，将每一行的公因数(即每一行的对角元)提取到行列式的符号外，则

$$\det\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= d_1 d_2 \cdots d_n$$

所以性质4.1成立.

4.1 n阶方阵的行列式

若对角阵的对角元素都非零，利用行列式的线性性质，将每一行的公因数(即每一行的对角元)提取到行列式的符号外，则

$$\det\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= d_1 d_2 \cdots d_n$$

所以性质4.1成立.

性质4.2 行列式有一行元素全为0，则行列式的值为0.

4.1 n阶方阵的行列式

若对角阵的对角元素都非零，利用行列式的线性性质，将每一行的公因数(即每一行的对角元)提取到行列式的符号外，则

$$\det\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= d_1 d_2 \cdots d_n$$

所以性质4.1成立.

性质4.2 行列式有一行元素全为0，则行列式的值为0 .

这是因为，行列式有一行元素全为0，

4.1 n阶方阵的行列式

若对角阵的对角元素都非零，利用行列式的线性性质，将每一行的公因数(即每一行的对角元)提取到行列式的符号外，则

$$\det\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= d_1 d_2 \cdots d_n$$

所以性质4.1成立.

性质4.2 行列式有一行元素全为0，则行列式的值为0.

这是因为，行列式有一行元素全为0，则有公因数0，

4.1 n阶方阵的行列式

若对角阵的对角元素都非零，利用行列式的线性性质，将每一行的公因数(即每一行的对角元)提取到行列式的符号外，则

$$\det\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= d_1 d_2 \cdots d_n$$

所以性质4.1成立.

性质4.2 行列式有一行元素全为0，则行列式的值为0.

这是因为，行列式有一行元素全为0，则有公因数0，由行列式的线性性质，公因数0 可以提取到行列式的符号外，

4.1 n阶方阵的行列式

若对角阵的对角元素都非零，利用行列式的线性性质，将每一行的公因数(即每一行的对角元)提取到行列式的符号外，则

$$\det\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= d_1 d_2 \cdots d_n$$

所以性质4.1成立.

性质4.2 行列式有一行元素全为0，则行列式的值为0 .

这是因为，行列式有一行元素全为0，则有公因数0，由行列式的线性性质，公因数0 可以提取到行列式的符号外，从而行列式的值为0 .

4.1 n阶方阵的行列式

性质4.3 行列式的两行相同，行列式的值为0.

4.1 n阶方阵的行列式

性质4.3 行列式的两行相同，行列式的值为0.

假设矩阵A的第i 行和第j 行相同，则$P(i,j)A = A$ ，

$\det A = \det(P(i,j)A)$

4.1 n阶方阵的行列式

性质4.3 行列式的两行相同，行列式的值为0.

假设矩阵A的第i 行和第j 行相同，则$P(i,j)A = A$ ，

$\det A = \det(P(i,j)A) = -\det A$, 所以$\det A = 0$.

4.1 n阶方阵的行列式

性质4.3 行列式的两行相同，行列式的值为0.

假设矩阵A的第i 行和第j 行相同，则$P(i,j)A = A$ ，
$\det A = \det(P(i,j)A) = -\det A$, 所以$\det A = 0$.

性质4.4 若行列式的两行对应成比例，则行列式的值为0.

4.1 n阶方阵的行列式

性质4.3 行列式的两行相同，行列式的值为0.

假设矩阵A的第i 行和第j 行相同，则$P(i,j)A = A$ ，

$\det A = \det(P(i,j)A) = -\det A$, 所以$\det A = 0$.

性质4.4 若行列式的两行对应成比例，则行列式的值为0.

设矩阵A的第i行与第j 行对应成比例，且比例系数为k. 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4.1 n阶方阵的行列式

由行列式的线性性质和性质4.2，则

4.1 n阶方阵的行列式

由行列式的线性性质和性质4.2，则

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = k\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = 0.$$

4.1 n阶方阵的行列式

由行列式的线性性质和性质4.2，则

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = k\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = 0.$$

性质4.5 将行列式的某一行的倍数加到另外一行，行列式的值不变.

4.1 n阶方阵的行列式

由行列式的线性性质和性质4.2，则

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = k\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = 0.$$

性质4.5 将行列式的某一行的倍数加到另外一行，行列式的值不变.

利用初等矩阵与初等变换之间的关系，该性质可以表述为：

$$\det(P(i(k),j)A) = \det A\ .$$

4.1 n阶方阵的行列式

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，将其第i 行的k 倍加到第j 行，得到

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4.1 n阶方阵的行列式

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，将其第i 行的k 倍加到第j 行，得到

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

利用行列式的线性性质，则

4.1 n阶方阵的行列式

$$\det B = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4.1 n阶方阵的行列式

$$\det B = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \det A$$

4.1 n阶方阵的行列式

$$\det B = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \det A$$

性质4.6 初等矩阵的行列式的值分别为

4.1 n阶方阵的行列式

$$\det B = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \det A$$

性质4.6 初等矩阵的行列式的值分别为

$$\det P(i,j) = -1;$$

4.1 n阶方阵的行列式

$$\det B = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \det A$$

性质4.6 初等矩阵的行列式的值分别为

$$\det P(i,j) = -1; \ \det P(i(c)) = c;$$

4.1 n阶方阵的行列式

$$\det B = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \det A$$

性质4.6 初等矩阵的行列式的值分别为

$$\det P(i,j) = -1;\ \det P(i(c)) = c;\ \det P(i(c),j) = 1.$$

4.1 n阶方阵的行列式

这是因为，

4.1 n阶方阵的行列式

这是因为，交换单位矩阵的第i 、j 行，则得到$P(i,j)$，由行列式的反对称性质，则

$$\det P(i,j) = \det(P(i,j)I_n) =$$

4.1 n阶方阵的行列式

这是因为，交换单位矩阵的第i 、j 行，则得到$P(i,j)$，由行列式的反对称性质，则

$$\det P(i,j) = \det(P(i,j)I_n) = -\det I_n = -1.$$

4.1 n阶方阵的行列式

这是因为，交换单位矩阵的第i 、j 行，则得到$P(i,j)$，由行列式的反对称性质，则

$$\det P(i,j) = \det(P(i,j)I_n) = -\det I_n = -1.$$

将$P(i(c))$ 的第i 行公因数c 提到行列式的符号外，则得到单位矩阵的行列式，

4.1 n阶方阵的行列式

这是因为，交换单位矩阵的第i 、j 行，则得到$P(i,j)$，由行列式的反对称性质，则

$$\det P(i,j) = \det(P(i,j)I_n) = -\det I_n = -1.$$

将$P(i(c))$ 的第i 行公因数c 提到行列式的符号外，则得到单位矩阵的行列式，由行列式的线性性质，

$$\det P(i(c)) =$$

4.1 n阶方阵的行列式

这是因为，交换单位矩阵的第i 、j 行，则得到$P(i,j)$，由行列式的反对称性质，则

$$\det P(i,j) = \det(P(i,j)I_n) = -\det I_n = -1.$$

将$P(i(c))$ 的第i 行公因数c 提到行列式的符号外，则得到单位矩阵的行列式，由行列式的线性性质，

$$\det P(i(c)) = c\det I_n = c.$$

4.1 n阶方阵的行列式

这是因为，交换单位矩阵的第i、j行，则得到$P(i,j)$，由行列式的反对称性质，则

$$\det P(i,j) = \det(P(i,j)I_n) = -\det I_n = -1.$$

将$P(i(c))$的第i行公因数c提到行列式的符号外，则得到单位矩阵的行列式，由行列式的线性性质，

$$\det P(i(c)) = c \det I_n = c.$$

将单位矩阵的第i行的c倍加到第j行，得$P(i(c),j)$，

4.1 n阶方阵的行列式

这是因为，交换单位矩阵的第i 、j 行，则得到$P(i,j)$，由行列式的反对称性质，则

$$\det P(i,j) = \det(P(i,j)I_n) = -\det I_n = -1.$$

将$P(i(c))$ 的第i 行公因数c 提到行列式的符号外，则得到单位矩阵的行列式，由行列式的线性性质，

$$\det P(i(c)) = c\det I_n = c.$$

将单位矩阵的第i 行的c 倍加到第j 行，得$P(i(c),j)$，由行列式的性质4.5，

$$\det P(i(c),j) =$$

4.1 n阶方阵的行列式

这是因为，交换单位矩阵的第i 、j 行，则得到$P(i,j)$，由行列式的反对称性质，则

$$\det P(i,j) = \det(P(i,j)I_n) = -\det I_n = -1.$$

将$P(i(c))$ 的第i 行公因数c 提到行列式的符号外，则得到单位矩阵的行列式，由行列式的线性性质，

$$\det P(i(c)) = c\det I_n = c.$$

将单位矩阵的第i 行的c 倍加到第j 行，得$P(i(c),j)$，由行列式的性质4.5，

$$\det P(i(c),j) = \det(P(i(c),j)I_n) =$$

4.1 n阶方阵的行列式

这是因为，交换单位矩阵的第i、j 行，则得到$P(i,j)$，由行列式的反对称性质，则

$$\det P(i,j) = \det(P(i,j)I_n) = -\det I_n = -1.$$

将$P(i(c))$ 的第i 行公因数c 提到行列式的符号外，则得到单位矩阵的行列式，由行列式的线性性质，

$$\det P(i(c)) = c \det I_n = c.$$

将单位矩阵的第i 行的c 倍加到第j 行，得$P(i(c),j)$，由行列式的性质4.5，

$$\det P(i(c),j) = \det(P(i(c),j)I_n) = \det I_n = 1.$$

.

4.1 n阶方阵的行列式

性质4.7 初等矩阵与矩阵A 乘积的行列式等于它们各自行列式的积.即

4.1 n阶方阵的行列式

性质4.7 初等矩阵与矩阵A 乘积的行列式等于它们各自行列式的积.即

$$\det(P(i,j)A) = \det P(i,j) \det A;$$

4.1 n阶方阵的行列式

性质4.7 初等矩阵与矩阵A 乘积的行列式等于它们各自行列式的积.即

$$\det(P(i,j)A) = \det P(i,j)\det A;$$
$$\det(P(i(c))A) = \det P(i(c))\det A;$$

4.1 n阶方阵的行列式

性质4.7 初等矩阵与矩阵A 乘积的行列式等于它们各自行列式的积.即

$$\det(P(i,j)A) = \det P(i,j)\det A;$$
$$\det(P(i(c))A) = \det P(i(c))\det A;$$
$$\det(P(i(c),j)A) = \det P(i(c),j)\det A.$$

4.1 n阶方阵的行列式

性质4.7 初等矩阵与矩阵A 乘积的行列式等于它们各自行列式的积.即

$$\det(P(i,j)A) = \det P(i,j)\det A;$$
$$\det(P(i(c))A) = \det P(i(c))\det A;$$
$$\det(P(i(c),j)A) = \det P(i(c),j)\det A.$$

由初等变换与初等矩阵之间的关系，$P(i,j)A$ 即为交换矩阵A 的第i 行和第j 行；$P(i(c))A$ 是将A 的第i 行乘数c ；而$P(i(c),j)A$ 是将A 的第i 行的c 倍加到第j 行，

4.1 n阶方阵的行列式

性质4.7 初等矩阵与矩阵A 乘积的行列式等于它们各自行列式的积.即

$$\det(P(i,j)A) = \det P(i,j)\det A;$$
$$\det(P(i(c))A) = \det P(i(c))\det A;$$
$$\det(P(i(c),j)A) = \det P(i(c),j)\det A.$$

由初等变换与初等矩阵之间的关系，$P(i,j)A$ 即为交换矩阵A 的第i 行和第j 行；$P(i(c))A$ 是将A 的第i 行乘数c ；而$P(i(c),j)A$ 是将A 的第i 行的c 倍加到第j 行，再由行列式的定义以及初等矩阵行列式的值，则

$$\det(P(i,j)A) =$$

4.1 n阶方阵的行列式

性质4.7 初等矩阵与矩阵A 乘积的行列式等于它们各自行列式的积.即

$$\det(P(i,j)A) = \det P(i,j)\det A;$$

$$\det(P(i(c))A) = \det P(i(c))\det A;$$

$$\det(P(i(c),j)A) = \det P(i(c),j)\det A.$$

由初等变换与初等矩阵之间的关系，$P(i,j)A$ 即为交换矩阵A 的第i 行和第j 行；$P(i(c))A$ 是将A 的第i 行乘数c ；而$P(i(c),j)A$ 是将A 的第i 行的c 倍加到第j 行，再由行列式的定义以及初等矩阵行列式的值，则

$$\det(P(i,j)A) = -\det A = \det P(i,j)\det A;$$

4.1 n阶方阵的行列式

性质4.7 初等矩阵与矩阵A 乘积的行列式等于它们各自行列式的积.即

$$\det(P(i,j)A) = \det P(i,j) \det A;$$
$$\det(P(i(c))A) = \det P(i(c)) \det A;$$
$$\det(P(i(c),j)A) = \det P(i(c),j) \det A.$$

由初等变换与初等矩阵之间的关系，$P(i,j)A$ 即为交换矩阵A 的第i 行和第j 行；$P(i(c))A$ 是将A 的第i 行乘数c ；而$P(i(c),j)A$ 是将A 的第i 行的c 倍加到第j 行，再由行列式的定义以及初等矩阵行列式的值，则

$$\det(P(i,j)A) = -\det A = \det P(i,j) \det A;$$
$$\det(P(i(c))A) = c \det A = \det P(i(c)) \det A;$$

4.1 n阶方阵的行列式

性质4.7 初等矩阵与矩阵A 乘积的行列式等于它们各自行列式的积.即

$$\det(P(i,j)A) = \det P(i,j)\det A;$$

$$\det(P(i(c))A) = \det P(i(c))\det A;$$

$$\det(P(i(c),j)A) = \det P(i(c),j)\det A.$$

由初等变换与初等矩阵之间的关系，$P(i,j)A$ 即为交换矩阵A 的第i 行和第j 行；$P(i(c))A$ 是将A 的第i 行乘数c ；而$P(i(c),j)A$ 是将A 的第i 行的c 倍加到第j 行，再由行列式的定义以及初等矩阵行列式的值，则

$$\det(P(i,j)A) = -\det A = \det P(i,j)\det A;$$

$$\det(P(i(c))A) = c\det A = \det P(i(c))\det A;$$

$$\det(P(i(c),j)A) = \det A = \det P(i(c),j)\det A.$$

4.1 n阶方阵的行列式

注：性质4.7实际上也给出了行列式的“初等行变换”，即

4.1 n阶方阵的行列式

注：性质4.7实际上也给出了行列式的“初等行变换”，即

(1) 交换行列式的两行，行列式变号；

4.1 n阶方阵的行列式

注：性质4.7实际上也给出了行列式的“初等行变换”，即

(1) 交换行列式的两行，行列式变号；

(2) 将行列式的某一行乘非零数c，就相当于行列式的值乘c；

4.1 n阶方阵的行列式

注：性质4.7实际上也给出了行列式的“初等行变换”，即

(1) 交换行列式的两行，行列式变号；

(2) 将行列式的某一行乘非零数c，就相当于行列式的值乘c；

(3) 将行列式的某一行乘数c 加到另一行,行列式的值不变.

4.1 n阶方阵的行列式

注：性质4.7实际上也给出了行列式的“初等行变换”，即

(1) 交换行列式的两行，行列式变号；

(2) 将行列式的某一行乘非零数c，就相当于行列式的值乘c；

(3) 将行列式的某一行乘数c 加到另一行,行列式的值不变.

性质4.8 三角形矩阵的行列式等于对角元素之积.即

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

4.1 n阶方阵的行列式

注：性质4.7实际上也给出了行列式的“初等行变换”，即

(1) 交换行列式的两行，行列式变号；

(2) 将行列式的某一行乘非零数c，就相当于行列式的值乘c；

(3) 将行列式的某一行乘数c 加到另一行,行列式的值不变.

性质4.8 三角形矩阵的行列式等于对角元素之积.即

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=$$

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

4.1 n阶方阵的行列式

注：性质4.7实际上也给出了行列式的“初等行变换”，即

(1) 交换行列式的两行，行列式变号；

(2) 将行列式的某一行乘非零数c，就相当于行列式的值乘c；

(3) 将行列式的某一行乘数c 加到另一行,行列式的值不变.

性质4.8 三角形矩阵的行列式等于对角元素之积.即

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

4.1 n阶方阵的行列式

任何矩阵经过初等行变换，都可以化为阶梯形矩阵。

4.1 n阶方阵的行列式

任何矩阵经过初等行变换，都可以化为阶梯形矩阵。而对方阵而言，阶梯形矩阵即为三角形矩阵。

4.1 n阶方阵的行列式

任何矩阵经过初等行变换，都可以化为阶梯形矩阵。而对方阵而言，阶梯形矩阵即为三角形矩阵。

由性质4.8，三角形矩阵的行列式的值是可求的，

4.1 n阶方阵的行列式

任何矩阵经过初等行变换，都可以化为阶梯形矩阵。而对方阵而言，阶梯形矩阵即为三角形矩阵。

由性质4.8，三角形矩阵的行列式的值是可求的，而性质4.7给出了初等变换下行列式之间的关系。

4.1 n阶方阵的行列式

任何矩阵经过初等行变换，都可以化为阶梯形矩阵。而对方阵而言，阶梯形矩阵即为三角形矩阵。

由性质4.8，三角形矩阵的行列式的值是可求的，而性质4.7给出了初等变换下行列式之间的关系。

所以求一个行列式的值，只要利用初等行变换将其化为三角形，就可以求出行列式的值.

4.1 n阶方阵的行列式

任何矩阵经过初等行变换，都可以化为阶梯形矩阵。而对方阵而言，阶梯形矩阵即为三角形矩阵。

由性质4.8，三角形矩阵的行列式的值是可求的，而性质4.7给出了初等变换下行列式之间的关系。

所以求一个行列式的值，只要利用初等行变换将其化为三角形，就可以求出行列式的值.

这是求行列式的值的主要方法，将在下一节讨论.

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com