线性代数
第三章：向量空间

宿州学院　数学与统计学院

目录

3.4 向量组的秩

已知结论：

3.4 向量组的秩

已知结论:

向量组若存在部分组线性相关，则整体线性相关；

3.4 向量组的秩

已知结论：

向量组若存在部分组线性相关，则整体线性相关；若整体线性无关，则其任意部分组都线性无关.

3.4 向量组的秩

已知结论：

向量组若存在部分组线性相关，则整体线性相关；若整体线性无关，则其任意部分组都线性无关.

本节探讨向量组的部分组和整体的线性相关性问题.

3.4 向量组的秩

已知结论：

向量组若存在部分组线性相关，则整体线性相关；若整体线性无关，则其任意部分组都线性无关.

本节探讨向量组的部分组和整体的线性相关性问题.

例如，

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

是R^3中的4个向量组成的向量组.

3.4 向量组的秩

已知结论：

向量组若存在部分组线性相关，则整体线性相关；若整体线性无关，则其任意部分组都线性无关.

本节探讨向量组的部分组和整体的线性相关性问题.

例如，

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

是R^3中的4个向量组成的向量组.直接验证知，其两个向量构成的部分组α_1, α_2;

3.4 向量组的秩

已知结论：

向量组若存在部分组线性相关，则整体线性相关；若整体线性无关，则其任意部分组都线性无关.

本节探讨向量组的部分组和整体的线性相关性问题.

例如，

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

是R^3中的4个向量组成的向量组.直接验证知，其两个向量构成的部分组α_1,α_2; α_1,α_3;

3.4 向量组的秩

已知结论：

向量组若存在部分组线性相关，则整体线性相关；若整体线性无关，则其任意部分组都线性无关.

本节探讨向量组的部分组和整体的线性相关性问题.

例如，

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

是R^3中的4个向量组成的向量组.直接验证知，其两个向量构成的部分组α_1,α_2; α_1,α_3; α_2,α_4;

3.4 向量组的秩

已知结论：

向量组若存在部分组线性相关，则整体线性相关；若整体线性无关，则其任意部分组都线性无关.

本节探讨向量组的部分组和整体的线性相关性问题.

例如，

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

是R^3中的4个向量组成的向量组.直接验证知，其两个向量构成的部分组α_1,α_2；α_1,α_3；α_2,α_4；α_3,α_4 都是线性无关的，而其任意三个向量组成的部分组都是线性相关的.

3.4 向量组的秩

已知结论：

向量组若存在部分组线性相关，则整体线性相关；若整体线性无关，则其任意部分组都线性无关.

本节探讨向量组的部分组和整体的线性相关性问题.

例如，

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

是R^3中的4个向量组成的向量组.直接验证知，其两个向量构成的部分组α_1,α_2；α_1,α_3；α_2,α_4；α_3,α_4 都是线性无关的，而其任意三个向量组成的部分组都是线性相关的.

也就是说，其线性无关的部分组中，所含向量个数最多是2.

3.4 向量组的秩

所谓线性无关的部分组中所含向量个数最多是2的含义是：

3.4 向量组的秩

所谓线性无关的部分组中所含向量个数最多是2的含义是：向量组中存在含两个向量的线性无关的部分组，且在此部分组中再任意添加一个向量就线性相关了.

3.4 向量组的秩

所谓线性无关的部分组中所含向量个数最多是2的含义是：向量组中存在含两个向量的线性无关的部分组，且在此部分组中再任意添加一个向量就线性相关了.

含向量个数最多的线性无关的部分组称为向量组的极大线性无关组.

3.4 向量组的秩

所谓线性无关的部分组中所含向量个数最多是2的含义是：向量组中存在含两个向量的线性无关的部分组，且在此部分组中再任意添加一个向量就线性相关了.

含向量个数最多的线性无关的部分组称为向量组的极大线性无关组.

问题是：给定向量组的极大线性无关组之间会有什么关系？

3.4 向量组的秩

所谓线性无关的部分组中所含向量个数最多是2的含义是：向量组中存在含两个向量的线性无关的部分组，且在此部分组中再任意添加一个向量就线性相关了.

含向量个数最多的线性无关的部分组称为向量组的极大线性无关组.

问题是：给定向量组的极大线性无关组之间会有什么关系？

先给出极大线性无关组的定义.

3.4 向量组的秩

定义3.3 设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 是F^n中m个向量组成的向量组，$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}$ 是其r个向量构成的部分组，

3.4 向量组的秩

定义3.3 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 是F^n中m个向量组成的向量组，$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 是其r个向量构成的部分组， 若满足:

(1) $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 线性无关；

3.4 向量组的秩

定义3.3 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 是F^n中m个向量组成的向量组，$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 是其r个向量构成的部分组， 若满足:

(1) $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 线性无关；

(2)任取$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$以外的向量$\alpha_k$ (若还存在的话)，都有$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}, \alpha_k$ 线性相关.

3.4 向量组的秩

定义3.3 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 是F^n中m个向量组成的向量组，$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 是其r个向量构成的部分组，若满足:

(1) $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 线性无关；

(2)任取$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$以外的向量$\alpha_k$ (若还存在的话)，都有$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}, \alpha_k$ 线性相关.

则称$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 是向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 的一个极大线性无关组.

3.4 向量组的秩

例如，向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3.4 向量组的秩

例如，向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

其部分组α_1,α_2满足

(1)α_1,α_2 线性无关；

3.4 向量组的秩

例如，向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

其部分组α_1,α_2满足

(1)α_1,α_2 线性无关；

(2)取α_1,α_2 以外的向量α_3 ，有$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；

3.4 向量组的秩

例如，向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

其部分组α_1,α_2满足

(1)α_1,α_2 线性无关；

(2)取α_1,α_2 以外的向量α_3 ，有$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；取α_1,α_2 以外的向量α_4 ，也有$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性相关.

3.4 向量组的秩

例如，向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

其部分组α_1,α_2满足

(1)α_1,α_2 线性无关；

(2)取α_1,α_2 以外的向量α_3，有$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；取α_1,α_2 以外的向量α_4，也有$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性相关.

即，任取α_1,α_2 以外的向量α_k, $(k=3,4)$，都有$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_k$ 线性相关.

3.4 向量组的秩

例如，向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

其部分组α_1,α_2满足

(1)α_1,α_2 线性无关；

(2)取α_1,α_2 以外的向量α_3，有$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；

取α_1,α_2 以外的向量α_4，也有$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性相关.

即，任取α_1,α_2 以外的向量α_k, $(k=3,4)$，都有$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_k$ 线性相关.

所以α_1,α_2 是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大线性无关组.

3.4 向量组的秩

同样验证得：向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的部分组 α_1, α_3;

3.4 向量组的秩

同样验证得：向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的部分组 $\alpha_1, \alpha_3; \alpha_2, \alpha_4;$

3.4 向量组的秩

同样验证得：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的部分组 α_1,α_3; α_2,α_4; α_3,α_4;都是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大线性无关组.

3.4 向量组的秩

同样验证得：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的部分组 $\alpha_1,\alpha_3;\ \alpha_2,\alpha_4;$ $\alpha_3,\alpha_4;$都是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大线性无关组.

例子也说明：同一向量组的极大线性无关组不唯一.

3.4 向量组的秩

同样验证得：向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的部分组 α_1, α_3; α_2, α_4; α_3, α_4;都是$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大线性无关组.

例子也说明：同一向量组的极大线性无关组不唯一.

那么，它们之间存在什么关系？

3.4 向量组的秩

同样验证得：向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的部分组 α_1, α_3; α_2, α_4; α_3, α_4;都是$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大线性无关组.

例子也说明：同一向量组的极大线性无关组不唯一.

那么，它们之间存在什么关系？

首先来看给定向量组与其极大线性无关组之间的关系.

3.4 向量组的秩

同样验证得：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的部分组 $\alpha_1,\alpha_3;\alpha_2,\alpha_4;\alpha_3,\alpha_4$;都是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大线性无关组.

例子也说明：同一向量组的极大线性无关组不唯一.

那么，它们之间存在什么关系？

首先来看给定向量组与其极大线性无关组之间的关系.

定理3.2 设$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ 是F^n中给定的向量组，$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\dots,\alpha_{i_r}$ 是其一个极大线性无关组，则对任意向量α_k，都有α_k可以被$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\dots,\alpha_{i_r}$ 唯一的线性表出.

3.4 向量组的秩

同样验证得：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的部分组 $\alpha_1,\alpha_3;\alpha_2,\alpha_4;\alpha_3,\alpha_4$;都是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大线性无关组.

例子也说明：同一向量组的极大线性无关组不唯一.

那么，它们之间存在什么关系?

首先来看给定向量组与其极大线性无关组之间的关系.

定理3.2 设$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 是F^n中给定的向量组，$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_r}$ 是其一个极大线性无关组，则对任意向量α_k，都有α_k可以被$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_r}$ 唯一的线性表出.

理由是：向量组本身线性无关，添一个向量就线性相关，则添的向量可以被原来的向量组线性表出.

3.4 向量组的秩

同样验证得：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的部分组 $\alpha_1,\alpha_3;\ \alpha_2,\alpha_4;\ \alpha_3,\alpha_4$;都是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大线性无关组.

例子也说明：同一向量组的极大线性无关组不唯一.

那么，它们之间存在什么关系?

首先来看给定向量组与其极大线性无关组之间的关系.

定理3.2 设$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 是F^n中给定的向量组，$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_r}$ 是其一个极大线性无关组，则对任意向量α_k，都有α_k可以被$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_r}$ 唯一的线性表出.

理由是：向量组本身线性无关，添一个向量就线性相关，则添的向量可以被原来的向量组线性表出.

定理3.2的证明，可以自己去尝试.

3.4 向量组的秩

定理3.2的结论是：

3.4 向量组的秩

定理3.2的结论是：F^n 中任意向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 中的每一个向量α_k 都可以由它自身的一个极大线性无关组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 线性表出.

3.4 向量组的秩

定理3.2的结论是：F^n 中任意向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 中的每一个向量α_k 都可以由它自身的一个极大线性无关组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 线性表出.

对极大无关组$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 中的每一个向量α_{i_l} ，

3.4 向量组的秩

定理3.2的结论是：F^n 中任意向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 中的每一个向量α_k 都可以由它自身的一个极大线性无关组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 线性表出.

对极大无关组$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 中的每一个向量α_{i_l} ，都有

$$\alpha_{i_l} = 0\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_{i_l-1} + 1\alpha_{i_l} + 0\alpha_{i_l+1} + \cdots + 0\alpha_m,$$

3.4 向量组的秩

定理3.2的结论是：F^n 中任意向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 中的每一个向量α_k 都可以由它自身的一个极大线性无关组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 线性表出.

对极大无关组$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 中的每一个向量α_{i_l} ，都有

$$\alpha_{i_l} = 0\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_{i_l-1} + 1\alpha_{i_l} + 0\alpha_{i_l+1} + \cdots + 0\alpha_m,$$

即α_{i_l} 可以由$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性表出.

3.4 向量组的秩

定理3.2的结论是：F^n 中任意向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 中的每一个向量α_k 都可以由它自身的一个极大线性无关组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 线性表出.

对极大无关组$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 中的每一个向量α_{i_l} ，都有

$$\alpha_{i_l} = 0\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_{i_l-1} + 1\alpha_{i_l} + 0\alpha_{i_l+1} + \cdots + 0\alpha_m,$$

即α_{i_l} 可以由$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性表出.

针对一个向量组中的每一个向量都可以被另一个向量组线性表出的这种关系，引入如下定义

3.4 向量组的秩

定义3.4 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$; $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$是$F^n$中的两个向量组，

3.4 向量组的秩

定义3.4 设$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$; $\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$是$F^n$中的两个向量组，若$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 中的每一个向量都可以由向量组$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$线性表出，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 可以由向量组$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$ 线性表出.

3.4 向量组的秩

定义3.4 设$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$; $\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$是$F^n$中的两个向量组，若$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 中的每一个向量都可以由向量组$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$线性表出，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 可以由向量组$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$ 线性表出.

若向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 可以由向量组$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$ 线性表出，且向量组$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$ 也可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 线性表出，则称它们是等价的.

3.4 向量组的秩

定义3.4 设$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$; $\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$是$F^n$中的两个向量组，若$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 中的每一个向量都可以由向量组$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$线性表出，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 可以由向量组$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$ 线性表出.

若向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 可以由向量组$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$ 线性表出，且向量组$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$ 也可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 线性表出，则称它们是等价的.

利用定义3.4，定理3.2可以叙述为：

在F^n中，向量组与其极大线性无关组是等价的.

3.4 向量组的秩

定义3.4 设$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$; $\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$是$F^n$中的两个向量组，若$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 中的每一个向量都可以由向量组$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$线性表出，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 可以由向量组$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$ 线性表出.

若向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 可以由向量组$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$ 线性表出，且向量组$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$ 也可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 线性表出，则称它们是等价的.

利用定义3.4，定理3.2可以叙述为：

在F^n中，向量组与其极大线性无关组是等价的.

向量组的线性表出和等价是两个向量组之间的一种关系.

3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具有以下性质

3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具有以下性质

(1)反身性.

3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具有以下性质

(1)反身性.即任何向量组都可以由其自身线性表出.

3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具有以下性质

(1)反身性.即任何向量组都可以由其自身线性表出.

(2)传递性.

3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具有以下性质

(1)反身性.即任何向量组都可以由其自身线性表出.

(2)传递性.向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$可以由向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 线性表出,

3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具有以下性质

(1)反身性.即任何向量组都可以由其自身线性表出.

(2)传递性.向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$可以由向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 线性表出，向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$可以由向量组$\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$线性表出，

3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具有以下性质

(1)反身性.即任何向量组都可以由其自身线性表出.

(2)传递性.向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$可以由向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$ 线性表出，向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$可以由向量组$\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m$线性表出，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 可以由向量组$\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m$ 线性表出.

3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具有以下性质

(1)反身性.即任何向量组都可以由其自身线性表出.

(2)传递性.向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$可以由向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 线性表出，向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$可以由向量组$\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$线性表出，则向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 可以由向量组$\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$ 线性表出.

向量组的等价关系具有以下性质

3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具有以下性质

(1)反身性.即任何向量组都可以由其自身线性表出.

(2)传递性.向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$可以由向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 线性表出，向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$可以由向量组$\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$线性表出，则向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 可以由向量组$\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$ 线性表出.

向量组的等价关系具有以下性质

(1)反身性.

3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具有以下性质

(1)反身性.即任何向量组都可以由其自身线性表出.

(2)传递性.向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$可以由向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 线性表出，向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$可以由向量组$\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$线性表出，则向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 可以由向量组$\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$ 线性表出.

向量组的等价关系具有以下性质

(1)反身性.即任何向量组都与其自身等价.

3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具有以下性质

(1)反身性.即任何向量组都可以由其自身线性表出.

(2)传递性.向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$可以由向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 线性表出，向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$可以由向量组$\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$线性表出，则向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 可以由向量组$\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$ 线性表出.

向量组的等价关系具有以下性质

(1)反身性.即任何向量组都与其自身等价.

(2)对称性.

3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具有以下性质

(1)反身性.即任何向量组都可以由其自身线性表出.

(2)传递性.向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$可以由向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$线性表出，向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$可以由向量组$\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$线性表出，则向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$可以由向量组$\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$线性表出.

向量组的等价关系具有以下性质

(1)反身性.即任何向量组都与其自身等价.

(2)对称性.向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$与向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$等价，

3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具有以下性质

(1)反身性.即任何向量组都可以由其自身线性表出.

(2)传递性.向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$可以由向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 线性表出，向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$可以由向量组$\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$线性表出，则向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 可以由向量组$\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$ 线性表出.

向量组的等价关系具有以下性质

(1)反身性.即任何向量组都与其自身等价.

(2)对称性.向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 与向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 等价，则向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 与向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 等价.

3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具有以下性质

(1)反身性.即任何向量组都可以由其自身线性表出.

(2)传递性.向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$可以由向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 线性表出，向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$可以由向量组$\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$线性表出，则向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 可以由向量组$\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$ 线性表出.

向量组的等价关系具有以下性质

(1)反身性.即任何向量组都与其自身等价.

(2)对称性.向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 与向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 等价，则向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 与向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 等价.

(3)传递性.

3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具有以下性质

(1)反身性.即任何向量组都可以由其自身线性表出.

(2)传递性.向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$可以由向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 线性表出，向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$可以由向量组$\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$线性表出，则向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 可以由向量组$\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$ 线性表出.

向量组的等价关系具有以下性质

(1)反身性.即任何向量组都与其自身等价.

(2)对称性.向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 与向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 等价，则向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 与向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 等价.

(3)传递性.向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$与向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 等价，

3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具有以下性质

(1)反身性.即任何向量组都可以由其自身线性表出.

(2)传递性.向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$可以由向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 线性表出，向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$可以由向量组$\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$线性表出，则向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 可以由向量组$\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$ 线性表出.

向量组的等价关系具有以下性质

(1)反身性.即任何向量组都与其自身等价.

(2)对称性.向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 与向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 等价，则向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 与向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 等价.

(3)传递性.向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$与向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 等价，向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$与向量组$\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$等价，

3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具有以下性质

(1)反身性.即任何向量组都可以由其自身线性表出.

(2)传递性.向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$可以由向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$ 线性表出，向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$可以由向量组$\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m$线性表出，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 可以由向量组$\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m$ 线性表出.

向量组的等价关系具有以下性质

(1)反身性.即任何向量组都与其自身等价.

(2)对称性.向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 与向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$ 等价，则向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$ 与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 等价.

(3)传递性.向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$与向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$ 等价，向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$与向量组$\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m$等价，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 与向量组$\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m$等价.

3.4 向量组的秩

向量组的极大线性无关组都与向量组自身是等价的，而向量组的等价关系又具有对称性与传递性，所以

3.4 向量组的秩

向量组的极大线性无关组都与向量组自身是等价的，而向量组的等价关系又具有对称性与传递性，所以

推论3.1

3.4 向量组的秩

向量组的极大线性无关组都与向量组自身是等价的，而向量组的等价关系又具有对称性与传递性，所以

推论3.1 同一个向量组的两个极大线性无关组之间是等价的.

3.4 向量组的秩

向量组的极大线性无关组都与向量组自身是等价的，而向量组的等价关系又具有对称性与传递性，所以

推论3.1 同一个向量组的两个极大线性无关组之间是等价的.

为了给出两个等价的线性无关的向量组之间的关系，还需要如下定理

3.4 向量组的秩

向量组的极大线性无关组都与向量组自身是等价的，而向量组的等价关系又具有对称性与传递性，所以

推论3.1 同一个向量组的两个极大线性无关组之间是等价的.

为了给出两个等价的线性无关的向量组之间的关系，还需要如下定理

定理3.3 设$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ ，$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$ 是F^n中的两个向量组，且满足：

3.4 向量组的秩

向量组的极大线性无关组都与向量组自身是等价的，而向量组的等价关系又具有对称性与传递性，所以

推论3.1 同一个向量组的两个极大线性无关组之间是等价的.

为了给出两个等价的线性无关的向量组之间的关系，还需要如下定理

定理3.3 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ ，$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 是F^n中的两个向量组，且满足：

(1) 向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 可以由向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 线性表出；

(2)$s > t$；

3.4 向量组的秩

向量组的极大线性无关组都与向量组自身是等价的，而向量组的等价关系又具有对称性与传递性，所以

推论3.1 同一个向量组的两个极大线性无关组之间是等价的.

为了给出两个等价的线性无关的向量组之间的关系，还需要如下定理

定理3.3 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ ，$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 是F^n中的两个向量组，且满足：

(1) 向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 可以由向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 线性表出；

(2)$s > t$；

则向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性相关.

3.4 向量组的秩

定理3.3给出了一个很有意思的结论：在向量空间F^n 中，若含向量个数多的向量组可以被含向量个数少的向量组线性表出，则向量个数多的向量组一定线性相关.

3.4 向量组的秩

定理3.3给出了一个很有意思的结论：在向量空间F^n 中，若含向量个数多的向量组可以被含向量个数少的向量组线性表出，则向量个数多的向量组一定线性相关.

定理的逆否命题是：

推论3.2 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ ，$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t \in F^n$，且满足

3.4 向量组的秩

定理3.3给出了一个很有意思的结论：在向量空间F^n 中，若含向量个数多的向量组可以被含向量个数少的向量组线性表出，则向量个数多的向量组一定线性相关.

定理的逆否命题是：

推论3.2 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ ，$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t \in F^n$，且满足

(1) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关；

(2) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 可以由$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 线性表出；

3.4 向量组的秩

定理3.3给出了一个很有意思的结论：在向量空间F^n 中，若含向量个数多的向量组可以被含向量个数少的向量组线性表出，则向量个数多的向量组一定线性相关.

定理的逆否命题是：

推论3.2 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ ，$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t \in F^n$，且满足

(1) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关；

(2) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 可以由$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 线性表出；

则$s \leq t$.

3.4 向量组的秩

定理3.3给出了一个很有意思的结论：在向量空间F^n 中，若含向量个数多的向量组可以被含向量个数少的向量组线性表出，则向量个数多的向量组一定线性相关.

定理的逆否命题是：

推论3.2 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ ，$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t \in F^n$，且满足

(1) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关；

(2) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 可以由$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 线性表出；

则$s \le t$.

推论3.3 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ ，$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t \in F^n$，且满足

3.4 向量组的秩

定理3.3给出了一个很有意思的结论：在向量空间F^n 中，若含向量个数多的向量组可以被含向量个数少的向量组线性表出，则向量个数多的向量组一定线性相关.

定理的逆否命题是：

推论3.2 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ ，$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t \in F^n$，且满足

(1) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关；

(2) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 可以由$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 线性表出；

则$s \le t$.

推论3.3 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ ，$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t \in F^n$，且满足

(1)$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关，且$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$也线性无关；

(2) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 与$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 等价；

3.4 向量组的秩

定理3.3给出了一个很有意思的结论：在向量空间F^n 中，若含向量个数多的向量组可以被含向量个数少的向量组线性表出，则向量个数多的向量组一定线性相关.

定理的逆否命题是：

推论3.2 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ ，$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t \in F^n$，且满足

(1) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关；

(2) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 可以由$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 线性表出；

则$s \leq t$.

推论3.3 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ ，$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t \in F^n$，且满足

(1)$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关，且$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$也线性无关；

(2) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 与$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 等价；

则$s = t$.

3.4 向量组的秩

推论3.3是说，两个等价的线性无关的向量组所含的向量个数相等.

3.4 向量组的秩

推论3.3是说，两个等价的线性无关的向量组所含的向量个数相等.

而，同一个向量组的极大线性无关组之间是等价的(推论3.1)，所以

3.4 向量组的秩

推论3.3是说，两个等价的线性无关的向量组所含的向量个数相等.

而，同一个向量组的极大线性无关组之间是等价的(推论3.1)，所以

定理3.4

3.4 向量组的秩

推论3.3是说，两个等价的线性无关的向量组所含的向量个数相等.

而，同一个向量组的极大线性无关组之间是等价的(推论3.1)，所以

定理3.4 在F^n中，同一个向量组的极大线性无关组所含的向量个数相等.

3.4 向量组的秩

推论3.3是说，两个等价的线性无关的向量组所含的向量个数相等.

而，同一个向量组的极大线性无关组之间是等价的(推论3.1)，所以

定理3.4 在F^n中，同一个向量组的极大线性无关组所含的向量个数相等.

定理3.4是说，在F^n 中，同一个向量组的极大线性无关组所含的向量个数是由向量组所确定的.

3.4 向量组的秩

推论3.3是说，两个等价的线性无关的向量组所含的向量个数相等.

而，同一个向量组的极大线性无关组之间是等价的(推论3.1)，所以

定理3.4 在F^n中，同一个向量组的极大线性无关组所含的向量个数相等.

定理3.4是说，在F^n 中，同一个向量组的极大线性无关组所含的向量个数是由向量组所确定的.

定义3.5 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$是$F^n$ 中的向量组.

3.4 向量组的秩

推论3.3是说，两个等价的线性无关的向量组所含的向量个数相等.

而，同一个向量组的极大线性无关组之间是等价的(推论3.1)，所以

定理3.4 在F^n中，同一个向量组的极大线性无关组所含的向量个数相等.

定理3.4是说，在F^n 中，同一个向量组的极大线性无关组所含的向量个数是由向量组所确定的.

定义3.5 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$是$F^n$ 中的向量组.称$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 的极大线性无关组中所含的向量个数r为向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$的秩.

记作$rank(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s) = r$.

3.4 向量组的秩

定义3.5的基础是定理3.4，而定理3.4又是在定理3.3的基础上获得的，所以定理3.3 是向量组的秩概念的基础.

3.4 向量组的秩

定义3.5的基础是定理3.4，而定理3.4又是在定理3.3的基础上获得的，所以定理3.3 是向量组的秩概念的基础.下面给出定理3.3的证明

3.4 向量组的秩

定义3.5的基础是定理3.4，而定理3.4又是在定理3.3的基础上获得的，所以定理3.3 是向量组的秩概念的基础.下面给出定理3.3的证明

定理3.3的证明

要证明向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$线性相关，就是要找不全为零的系数$x_1, x_2, ..., x_s$ ，使得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 成立.

3.4 向量组的秩

定义3.5的基础是定理3.4，而定理3.4又是在定理3.3的基础上获得的，所以定理3.3 是向量组的秩概念的基础.下面给出定理3.3的证明

定理3.3的证明

要证明向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$线性相关，就是要找不全为零的系数$x_1, x_2, ..., x_s$，使得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 成立.

由于向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 可以由向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$线性表出，

3.4 向量组的秩

定义3.5的基础是定理3.4，而定理3.4又是在定理3.3的基础上获得的，所以定理3.3 是向量组的秩概念的基础.下面给出定理3.3的证明

定理3.3的证明

要证明向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$线性相关，就是要找不全为零的系数$x_1, x_2, ..., x_s$，使得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 成立.

由于向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 可以由向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$线性表出，所以对任意$\alpha_k$ $(k = 1, 2, ..., s)$都存在系数$a_{1k}, a_{2k}, ..., a_{tk}$，使得$\alpha_k = a_{1k}\beta_1 + a_{2k}\beta_2 + \cdots + a_{tk}\beta_t$，

3.4 向量组的秩

即

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + \cdots + a_{t1}\beta_t \\ \alpha_2 = a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{t2}\beta_t \\ \vdots \\ \alpha_s = a_{1s}\beta_1 + a_{2s}\beta_2 + \cdots + a_{ts}\beta_t \end{cases}$$

3.4 向量组的秩

即

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + \cdots + a_{t1}\beta_t \\ \alpha_2 = a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{t2}\beta_t \\ \vdots \\ \alpha_s = a_{1s}\beta_1 + a_{2s}\beta_2 + \cdots + a_{ts}\beta_t \end{cases}$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s =$$

3.4 向量组的秩

即

$$
\begin{cases}
\alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + \cdots + a_{t1}\beta_t \\
\alpha_2 = a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{t2}\beta_t \\
\vdots \\
\alpha_s = a_{1s}\beta_1 + a_{2s}\beta_2 + \cdots + a_{ts}\beta_t
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = \quad & x_1(a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + \cdots + a_{t1}\beta_t) \\
& + x_2(a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{t2}\beta_t) \\
& + \cdots \\
& + x_s(a_{1s}\beta_1 + a_{2s}\beta_2 + \cdots + a_{ts}\beta_t)
\end{aligned}
$$

3.4 向量组的秩

即

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + \cdots + a_{t1}\beta_t \\ \alpha_2 = a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{t2}\beta_t \\ \vdots \\ \alpha_s = a_{1s}\beta_1 + a_{2s}\beta_2 + \cdots + a_{ts}\beta_t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = \quad & x_1(a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + \cdots + a_{t1}\beta_t) \\ & + x_2(a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{t2}\beta_t) \\ & + \cdots \\ & + x_s(a_{1s}\beta_1 + a_{2s}\beta_2 + \cdots + a_{ts}\beta_t) \\ & = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s)\beta_1 \\ & + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s)\beta_2 \\ & + \cdots \\ & + (a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \cdots + a_{ts}x_s)\beta_t \end{aligned}$$

3.4 向量组的秩

取

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s = 0 \\ \vdots \\ a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \cdots + a_{ts}x_s = 0 \end{cases}$$

则满足上式的$x_1, x_2, ..., x_s$也使$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$成立.

3.4 向量组的秩

取

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s = 0 \\ \vdots \\ a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \cdots + a_{ts}x_s = 0 \end{cases}$$

则满足上式的$x_1, x_2, ..., x_s$也使$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$成立.

而方程组的方程个数为t，小于未知量个数s，所以方程组有非零解.

3.4 向量组的秩

取

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1s}x_s=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2s}x_s=0\\ \vdots\\ a_{t1}x_1+a_{t2}x_2+\cdots+a_{ts}x_s=0 \end{cases}$$

则满足上式的$x_1,x_2,...,x_s$也使$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$成立.

而方程组的方程个数为t，小于未知量个数s，所以方程组有非零解.

即存在不全为零的数$x_1,x_2,...,x_s$，使得方程组中的每一个等式都成立，

3.4 向量组的秩

取

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s = 0 \\ \vdots \\ a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \cdots + a_{ts}x_s = 0 \end{cases}$$

则满足上式的$x_1, x_2, ..., x_s$也使$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$成立.

而方程组的方程个数为t，小于未知量个数s，所以方程组有非零解.

即存在不全为零的数$x_1, x_2, ..., x_s$，使得方程组中的每一个等式都成立，从而也使得$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 成立.

3.4 向量组的秩

取

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s = 0 \\ \vdots \\ a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \cdots + a_{ts}x_s = 0 \end{cases}$$

则满足上式的$x_1, x_2, ..., x_s$也使$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$成立.

而方程组的方程个数为t，小于未知量个数s，所以方程组有非零解.

即存在不全为零的数$x_1, x_2, ..., x_s$，使得方程组中的每一个等式都成立，从而也使得$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 成立.

所以$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性相关.

3.4 向量组的秩

再给出一些与向量组秩有关的命题.

3.4 向量组的秩

再给出一些与向量组秩有关的命题.

定理3.5

3.4 向量组的秩

再给出一些与向量组秩有关的命题.

定理3.5 等价向量组有相同的秩.

3.4 向量组的秩

再给出一些与向量组秩有关的命题.

定理3.5 等价向量组有相同的秩.

这是因为：

每个向量组的极大线性无关组与向量组自身等价，而等价具有传递性，所以等价向量组的极大线性无关组也等价。

3.4 向量组的秩

再给出一些与向量组秩有关的命题.

定理3.5 等价向量组有相同的秩.

这是因为:

每个向量组的极大线性无关组与向量组自身等价，而等价具有传递性，所以等价向量组的极大线性无关组也等价。再，等价的线性无关的向量组有相同的向量个数，所以，等价向量组的极大线性无关组所含的向量个数也相等。

3.4 向量组的秩

再给出一些与向量组秩有关的命题.

定理3.5 等价向量组有相同的秩.

这是因为：

每个向量组的极大线性无关组与向量组自身等价，而等价具有传递性，所以等价向量组的极大线性无关组也等价。再，等价的线性无关的向量组有相同的向量个数，所以，等价向量组的极大线性无关组所含的向量个数也相等。所以，它们有相同的秩。

3.4 向量组的秩

再给出一些与向量组秩有关的命题.

定理3.5 等价向量组有相同的秩.

这是因为：

每个向量组的极大线性无关组与向量组自身等价，而等价具有传递性，所以等价向量组的极大线性无关组也等价。再，等价的线性无关的向量组有相同的向量个数，所以，等价向量组的极大线性无关组所含的向量个数也相等。所以，它们有相同的秩。

若向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 可以由向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 线性表出，则$rank(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s) \leq rank(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t)$.

3.4 向量组的秩

定理3.6 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 是F^n中秩为r的向量组，则$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 中任意r个线性无关的向量构成的部分组都是$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 的极大线性无关组.

3.4 向量组的秩

定理3.6 设$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 是F^n中秩为r的向量组，则$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 中任意r个线性无关的向量构成的部分组都是$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 的极大线性无关组.

定理3.7 设$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta$ 是F^n中的$m+1$个向量，则向量β可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性表出的充要条件是向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 与向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta$ 有相同的秩.

向量β 可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性表出是线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$ 有解的充要条件，

所以，定理3.7实际上给出了一般的线性方程组有解的充要条件的另一种表述方式.

3.4 向量组的秩

定理3.6 设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 是F^n中秩为r的向量组，则$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 中任意r个线性无关的向量构成的部分组都是$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的极大线性无关组.

定理3.7 设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta$ 是F^n中的$m+1$个向量，则向量β可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表出的充要条件是向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 与向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta$ 有相同的秩.

向量β 可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表出是线性方程组$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta$ 有解的充要条件，

所以，定理3.7实际上给出了一般的线性方程组有解的充要条件的另一种表述方式. 下一节将利用向量组的秩概念，给出线性方程组有解的判定准则以及解的情况的判定方法.

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com