线性代数
第三章：向量空间

宿州学院　数学与统计学院

目录

3.6 线性方程组解的结构(1)

n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \quad (1)$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

与齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

有相同的系数矩阵，

3.6 线性方程组解的结构(1)

n元线性方程组

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right. \qquad (1)$$

与齐次线性方程组

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = 0 \end{array}\right. \qquad (2)$$

有相同的系数矩阵，称(2)为(1)导出齐次线性方程组.

3.6 线性方程组解的结构

方程组(2)由(1)唯一确定.方程组(1)的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构

方程组(2)由(1)唯一确定.方程组(1)的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

由定理3.10，当A的秩$r(A)$ 与$\overline{A}$ 的秩满足$r(A)=r(\overline{A})<n$ 时，线性方程组(1)有无穷多解，其导出齐次线性方程组(2)有非零解(非平凡解).

3.6 线性方程组解的结构

方程组(2)由(1)唯一确定.方程组(1)的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

由定理3.10，当A的秩$r(A)$ 与$\overline{A}$ 的秩满足$r(A)=r(\overline{A})<n$ 时，线性方程组(1)有无穷多解，其导出齐次线性方程组(2)有非零解(非平凡解).

若$r(A)=r(\overline{A})=r<n$，设$\overline{A}$ 经过初等行变换可以化为具有r个主元的规范形阶梯形矩阵$\overline{J}$.

3.6 线性方程组解的结构

方程组(2)由(1)唯一确定.方程组(1)的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

由定理3.10，当A的秩$r(A)$ 与$\overline{A}$ 的秩满足$r(A)=r(\overline{A})<n$ 时，线性方程组(1)有无穷多解，其导出齐次线性方程组(2)有非零解(非平凡解).

若$r(A)=r(\overline{A})=r<n$，设$\overline{A}$ 经过初等行变换可以化为具有r个主元的规范形阶梯形矩阵$\overline{J}$.为了表述的方便，不妨设其主元分别在第$1,2,...,r$列.即

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\overline{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1(r+1)} & \cdots & b_{1n} & d_1 \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\overline{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1(r+1)} & \cdots & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2(r+1)} & \cdots & b_{2n} & d_2 \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\overline{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1(r+1)} & \cdots & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2(r+1)} & \cdots & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\overline{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1(r+1)} & \cdots & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2(r+1)} & \cdots & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r(r+1)} & \cdots & b_{rn} & d_r \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\overline{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1(r+1)} & \cdots & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2(r+1)} & \cdots & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r(r+1)} & \cdots & b_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & & & \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\overline{J}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1(r+1)} & \cdots & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2(r+1)} & \cdots & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r(r+1)} & \cdots & b_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\overline{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1(r+1)} & \cdots & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2(r+1)} & \cdots & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r(r+1)} & \cdots & b_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\overline{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1(r+1)} & \cdots & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2(r+1)} & \cdots & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r(r+1)} & \cdots & b_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

经过相同的初等行变换，系数矩阵A化为

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1(r+1)} & \cdots & b_{1n} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$J = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1(r+1)} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2(r+1)} & \cdots & b_{2n} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}\right.$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$J = \left(\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1(r+1)} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2(r+1)} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{matrix} \right.$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$J = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1(r+1)} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2(r+1)} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r(r+1)} & \cdots & b_{rn} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}\right.$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$J=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1(r+1)} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2(r+1)} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r(r+1)} & \cdots & b_{rn}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1(r+1)} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2(r+1)} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r(r+1)} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1(r+1)} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2(r+1)} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r(r+1)} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1(r+1)} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2(r+1)} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r(r+1)} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

从而导出齐次线性方程组(2)的通解为

$$\begin{cases} x_1 & = -b_{1(r+1)}x_{r+1} - \cdots - b_{1n}x_n \\ x_2 & = -b_{2(r+1)}x_{r+1} - \cdots - b_{2n}x_n \\ & \vdots \\ x_r & = -b_{r(r+1)}x_{r+1} - \cdots - b_{rn}x_n \end{cases}$$

其中$x_{r+1},\dots,x_n$是自由未知量.

3.6 线性方程组解的结构(1)

未知量$x_1, x_2, ..., x_r$ 被自由未知量$x_{r+1}, ..., x_n$ 唯一确定.

3.6 线性方程组解的结构(1)

未知量$x_1, x_2, \ldots, x_r$ 被自由未知量$x_{r+1}, \ldots, x_n$ 唯一确定.即每给定一组$x_{r+1}, \ldots, x_n$ 的取值，就能唯一地确定其余的未知量$x_1, x_2, \ldots, x_r$.所以，齐次线性方程组(2)的解集可以表示为

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} -b_{1(r+1)}c_{r+1} - \cdots - b_{1n}c_n \\ -b_{2(r+1)}c_{r+1} - \cdots - b_{2n}c_n \\ \vdots \\ -b_{r(r+1)}c_{r+1} - \cdots - b_{rn}c_n \\ c_{r+1} \\ c_{r+2} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \middle| \text{其中} c_{r+1}, \ldots, c_n \text{是任意数} \right\}.$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

齐次线性方程组(2)解集具有性质：

3.6 线性方程组解的结构(1)

齐次线性方程组(2)解集具有性质：

(1)设 $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$ 是Ω中中的两个解向量，则对任意的$1 \leq i \leq m$，都有

$$a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \cdots + a_{in}k_n = 0, a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + \cdots + a_{in}l_n = 0$$

从而

$$a_{i1}(k_1 + l_1) + a_{i2}(k_2 + l_2) + \cdots + a_{in}(k_n + l_n) = 0,$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

即Ω中的任意两解向量的和 $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1+l_1 \\ k_2+l_2 \\ \vdots \\ k_n+l_n \end{pmatrix}$ 仍在Ω 中.

3.6 线性方程组解的结构(1)

即Ω中的任意两解向量的和 $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + l_1 \\ k_2 + l_2 \\ \vdots \\ k_n + l_n \end{pmatrix}$ 仍在Ω 中.

对任意的数l，都有

$$a_{i1}(lk_1) + a_{i2}(lk_2) + \cdots + a_{in}(lk_n) = 0,$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

即Ω中的任意两解向量的和 $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + l_1 \\ k_2 + l_2 \\ \vdots \\ k_n + l_n \end{pmatrix}$ 仍在Ω 中.

对任意的数l，都有

$$a_{i1}(lk_1) + a_{i2}(lk_2) + \cdots + a_{in}(lk_n) = 0,$$

即Ω中解向量的任意数倍l $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} lk_1 \\ lk_2 \\ \vdots \\ lk_n \end{pmatrix}$ 仍在Ω 中.

3.6 线性方程组解的结构(1)

Ω 中任意两个解向量的和仍在Ω中，Ω 中任意解向量的数积仍在Ω 中.

3.6 线性方程组解的结构(1)

Ω 中任意两个解向量的和仍在Ω中，Ω 中任意解向量的数积仍在Ω 中.

即，

3.6 线性方程组解的结构(1)

Ω 中任意两个解向量的和仍在Ω中，Ω 中任意解向量的数积仍在Ω 中.

即，齐次线性方程组任意两解之和仍是它的解，解的数积仍是它的解.

3.6 线性方程组解的结构(1)

Ω 中任意两个解向量的和仍在Ω中，Ω 中任意解向量的数积仍在Ω 中.

即，齐次线性方程组任意两解之和仍是它的解，解的数积仍是它的解.

Ω关于数组向量的加法和数积是封闭的(运算结果仍然在集合中).

3.6 线性方程组解的结构(1)

Ω 中任意两个解向量的和仍在Ω中，Ω 中任意解向量的数积仍在Ω 中.

即，齐次线性方程组任意两解之和仍是它的解，解的数积仍是它的解.

Ω关于数组向量的加法和数积是封闭的(运算结果仍然在集合中).

具有这种性质的F^n的子集称为子空间.

3.6 线性方程组解的结构(1)

Ω 中任意两个解向量的和仍在Ω中，Ω 中任意解向量的数积仍在Ω 中.

即，齐次线性方程组任意两解之和仍是它的解，解的数积仍是它的解.

Ω关于数组向量的加法和数积是封闭的(运算结果仍然在集合中).

具有这种性质的F^n的子集称为子空间.

定义3.7

3.6 线性方程组解的结构(1)

Ω 中任意两个解向量的和仍在Ω中，Ω 中任意解向量的数积仍在Ω 中.

即，齐次线性方程组任意两解之和仍是它的解，解的数积仍是它的解.

Ω关于数组向量的加法和数积是封闭的(运算结果仍然在集合中).

具有这种性质的F^n的子集称为子空间.

定义3.7 设Ω是线性空间F^n 的非空子集，若Ω 对F^n 的运算是封闭的。即，任意的$\alpha, \beta \in F^n, k \in F$，都有$\alpha + \beta, k\alpha \in F$，则称$\Omega$ 是F^n 的一个子空间.

3.6 线性方程组解的结构(1)

Ω 中任意两个解向量的和仍在Ω中，Ω 中任意解向量的数积仍在Ω 中.

即，齐次线性方程组任意两解之和仍是它的解，解的数积仍是它的解.

Ω关于数组向量的加法和数积是封闭的(运算结果仍然在集合中).

具有这种性质的F^n的子集称为子空间.

定义3.7 设Ω是线性空间F^n 的非空子集，若Ω 对F^n 的运算是封闭的。即，任意的$\alpha, \beta \in F^n, k \in F$，都有$\alpha + \beta, k\alpha \in F$，则称$\Omega$ 是F^n 的一个子空间.

n 元齐次线性方程组的解集Ω 是F^n 的一个子空间，称为齐次线性方程组的解空间.

3.6 线性方程组解的结构(1)

(2)自由未知量 $\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 分别取下列$n-r$ 组值：

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

(2)自由未知量$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$分别取下列$n-r$ 组值：

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

(2)自由未知量$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$分别取下列$n-r$ 组值：

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

(2)自由未知量$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$分别取下列$n-r$ 组值：

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

得Ω中的$n-r$个解向量

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} -b_{1(r+1)} \\ -b_{2(r+1)} \\ \vdots \\ -b_{r(r+1)} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

得Ω中的$n-r$个解向量

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-b_{1(r+1)}\\-b_{2(r+1)}\\\vdots\\-b_{r(r+1)}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-b_{1(r+2)}\\-b_{2(r+2)}\\\vdots\\-b_{r(r+2)}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

得Ω中的$n-r$个解向量

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-b_{1(r+1)}\\-b_{2(r+1)}\\\vdots\\-b_{r(r+1)}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-b_{1(r+2)}\\-b_{2(r+2)}\\\vdots\\-b_{r(r+2)}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\eta_{n-r}=\begin{pmatrix}-b_{1n}\\-b_{2n}\\\vdots\\-b_{rn}\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

这$n-r$个解$\eta_1,\eta_2,...,\eta_{n-r}$具有以下性质：

3.6 线性方程组解的结构(1)

这$n-r$个解$\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_{n-r}$具有以下性质：

①$\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_{n-r}$线性无关.

3.6 线性方程组解的结构(1)

这$n-r$个解$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r}$具有以下性质：

①$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r}$线性无关.

这是因为解向量$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r}$ 是线性无关的向量组

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$ 的延伸组，线性无关.

3.6 线性方程组解的结构(1)

这$n-r$个解$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{n-r}$具有以下性质：

①$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{n-r}$线性无关.

这是因为解向量$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{n-r}$ 是线性无关的向量组

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$ 的延伸组，线性无关.

②Ω中的每一个解向量都可以由$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{n-r}$ 线性表出.

3.6 线性方程组解的结构(1)

任取Ω中的一个解向量

$$\eta = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix},$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

任取Ω中的一个解向量

$$\eta=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_r\\c_1\\c_2\\\vdots\\c_{n-r}\end{pmatrix},\text{记}\xi=\begin{pmatrix}-c_1b_{1(r+1)}-c_2b_{1(r+2)}-\cdots-c_{n-r}b_{1n}\\-c_1b_{2(r+1)}-c_2b_{2(r+2)}-\cdots-c_{n-r}b_{2n}\\\vdots\\-c_1b_{r(r+1)}-c_2b_{r(r+2)}-\cdots-c_{n-r}b_{rn}\\c_1\\c_2\\\vdots\\c_{n-r}\end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

任取Ω中的一个解向量

$$\eta=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_r\\c_1\\c_2\\\vdots\\c_{n-r}\end{pmatrix},\text{记}\xi=\begin{pmatrix}-c_1b_{1(r+1)}-c_2b_{1(r+2)}-\cdots-c_{n-r}b_{1n}\\-c_1b_{2(r+1)}-c_2b_{2(r+2)}-\cdots-c_{n-r}b_{2n}\\\vdots\\-c_1b_{r(r+1)}-c_2b_{r(r+2)}-\cdots-c_{n-r}b_{rn}\\c_1\\c_2\\\vdots\\c_{n-r}\end{pmatrix}$$

则$\xi=c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r}$仍是Ω中的解向量，且$\eta$与$\xi$的第$r+1,r+2,...,n$个分量分别相同.

3.6 线性方程组解的结构(1)

即，Ω中的两个解向量η与ξ是自由未知量取相同的值所对应的解.

3.6 线性方程组解的结构(1)

即，Ω中的两个解向量η与ξ是自由未知量取相同的值所对应的解.

齐次线性方程组的解向量由自由未知量唯一确定，$\eta = \xi$.

3.6 线性方程组解的结构(1)

即，Ω中的两个解向量η与ξ是自由未知量取相同的值所对应的解.

齐次线性方程组的解向量由自由未知量唯一确定，$\eta = \xi$.

即，齐次线性方程组(2)的解集Ω 中的任意一个解向量都可以由$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r}$ 线性表出.

3.6 线性方程组解的结构(1)

即，Ω中的两个解向量η与ξ是自由未知量取相同的值所对应的解.

齐次线性方程组的解向量由自由未知量唯一确定，$\eta=\xi$.

即，齐次线性方程组(2)的解集Ω 中的任意一个解向量都可以由$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{n-r}$ 线性表出.

$$\Omega=\{\eta|\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r},\text{其中}k_1,k_2,\ldots,k_{n-r}\text{是任意数}\}.$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

即，Ω中的两个解向量η与ξ是自由未知量取相同的值所对应的解.

齐次线性方程组的解向量由自由未知量唯一确定，$\eta=\xi$.

即，齐次线性方程组(2)的解集Ω 中的任意一个解向量都可以由$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{n-r}$ 线性表出.

$$\Omega=\{\eta|\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}, \text{其中} k_1, k_2, ..., k_{n-r}\text{是任意数}\}.$$

即：系数矩阵的秩为r的n 元齐次线性方程组(2)的解空间Ω是由$n-r$个线性无关的解向量$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{n-r}$ 组合得到的.

3.6 线性方程组解的结构(1)

定义3.8 设$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$是给定齐次线性方程组的$t$个解向量，若满足：

3.6 线性方程组解的结构(1)

定义3.8 设$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$是给定齐次线性方程组的$t$个解向量，若满足：(1) $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$线性无关；

3.6 线性方程组解的结构(1)

定义3.8 设$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_t$是给定齐次线性方程组的$t$个解向量，若满足：(1) $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_t$线性无关；(2)齐次线性方程组的任意一个解向量$\eta$ 都可以由$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_t$ 线性表出.

3.6 线性方程组解的结构(1)

定义3.8 设$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_t$是给定齐次线性方程组的$t$个解向量，若满足：(1) $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_t$线性无关；(2)齐次线性方程组的任意一个解向量$\eta$ 都可以由$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_t$ 线性表出.

则称$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_t$ 是给定齐次线性方程组的一个**基础解系**.

3.6 线性方程组解的结构(1)

定义3.8 设$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_t$是给定齐次线性方程组的$t$个解向量，若满足：(1) $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_t$线性无关；(2)齐次线性方程组的任意一个解向量$\eta$ 都可以由$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_t$ 线性表出.

则称$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_t$ 是给定齐次线性方程组的一个基础解系.

定理3.11 若n元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

系数矩阵的秩为$r<n$，

3.6 线性方程组解的结构(1)

定义3.8 设$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_t$是给定齐次线性方程组的$t$个解向量，若满足：(1) $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_t$线性无关；(2)齐次线性方程组的任意一个解向量$\eta$ 都可以由$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_t$ 线性表出.

则称$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_t$ 是给定齐次线性方程组的一个基础解系.

定理3.11 若n元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

系数矩阵的秩为$r < n$，

则存在由$n-r$个解$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{n-r}$ 组成的基础解系.

3.6 线性方程组解的结构(1)

定义3.8 设$\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_t$是给定齐次线性方程组的$t$个解向量，若满足：(1) $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_t$线性无关；(2)齐次线性方程组的任意一个解向量$\eta$ 都可以由$\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_t$ 线性表出.

则称$\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_t$ 是给定齐次线性方程组的一个基础解系.

定理3.11 若n元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

系数矩阵的秩为$r<n$，

则存在由$n-r$个解$\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_{n-r}$ 组成的基础解系.

且全部解为：

$$\{\eta|\eta=l_1\eta_1+l_2\eta_2+\cdots+l_{n-r}\eta_{n-r},\text{其中}l_1,l_2,\dots,l_{n-r}\text{是任意数}\}.$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

求齐次线性方程组基础解系和全部解的一般步骤：

3.6 线性方程组解的结构(1)

求齐次线性方程组基础解系和全部解的一般步骤：

(1) 写出齐次线性方程组的系数矩阵A；

3.6 线性方程组解的结构(1)

求齐次线性方程组基础解系和全部解的一般步骤：

(1) 写出齐次线性方程组的系数矩阵A；

(2)初等行变换将A 化为规范形阶梯形矩阵，确定A的秩r ；

3.6 线性方程组解的结构(1)

求齐次线性方程组基础解系和全部解的一般步骤：

(1) 写出齐次线性方程组的系数矩阵A；

(2)初等行变换将A 化为规范形阶梯形矩阵，确定A的秩r ；

(3) 在$r = n$时，方程只有0解(平凡解)。

3.6 线性方程组解的结构(1)

求齐次线性方程组基础解系和全部解的一般步骤：

(1) 写出齐次线性方程组的系数矩阵A；

(2)初等行变换将A 化为规范形阶梯形矩阵，确定A的秩r ；

(3) 在$r = n$时，方程只有0解(平凡解)。

在$r < n$时，写出规范阶梯形矩阵相应的齐次线性方程组，确定$n - r$ 个自由未知量 $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}$ ；

3.6 线性方程组解的结构(1)

求齐次线性方程组基础解系和全部解的一般步骤：

(1) 写出齐次线性方程组的系数矩阵A；

(2)初等行变换将A 化为规范形阶梯形矩阵，确定A的秩r ；

(3) 在$r = n$时，方程只有0解(平凡解)。

在$r < n$时，写出规范阶梯形矩阵相应的齐次线性方程组，确定$n - r$ 个自由未知量 $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-r}}$ ；

(4)分别取 $\begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_{n-r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$，得到齐次线性方程组$n - r$个解$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ ，即为基础解系；

3.6 线性方程组解的结构(1)

求齐次线性方程组基础解系和全部解的一般步骤：

(1) 写出齐次线性方程组的系数矩阵A；

(2)初等行变换将A 化为规范形阶梯形矩阵，确定A的秩r ；

(3) 在$r=n$时，方程只有0解(平凡解)。

在$r<n$时，写出规范阶梯形矩阵相应的齐次线性方程组，确定$n-r$ 个自由未知量 $x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{n-r}}$ ；

(4)分别取 $\begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_{n-r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$，得到齐次线性方程组$n-r$个解$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{n-r}$ ，即为基础解系；

(5) 齐次线性方程组的全部解为

$\{\eta|\eta=l_1\eta_1+l_2\eta_2+\cdots+l_{n-r}\eta_{n-r}$, 其中$l_1,l_2,\ldots,l_{n-r}$是任意数$\}$.

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com