

《线性代数》

应 用 题

数学与统计学
院

目录

应 用 题

《线性代数》

应 用 题

宿州学院 数学与统计学院

1

拥有30万城市就业人口的宿州市，其就业人口主要从事工业、商业、服务业工作。假定宿州市就业人口在若干年内保持不变，而社会调查表明：

(1) 在这30万就业人员中，目前约有15万人从事工业，9万人从事商业，6万从事服务业。

(2) 在从事工业人员中，每年约有20%改为从事商业，10%改为服务业。

(3) 在从事商业人员中，每年约有20%改为从事工业，10%改为服务业。

(4) 在从事服务业人员中，每年约有10%改为从事工业，10%改为从事商业。

现宿州市政府为了制定某项长期政策，需要了解近一、二年后从事各业人员的人数以及经过若干年后，从事各业人员总数之发展趋势。

请你利用所学习线性代数的知识，利用上述信息，建立适当的数学模型，给出近一、二年后从事各业人员的人数以及经过若干年后，从事各业人员总数之发展趋势。

2

Fibonacci数列是经典的数列之一。1202年，意大利数学家斐波那契在一本书中提出一个问题：

如果一对兔子出生一个月后开始繁殖，每个月生出一对后代，现有一对新生兔子，假定兔子只繁殖，没有死亡，问第 k 月月初会有多少兔子？

以“对”为单位，每月兔子组队数构成一个数列，这便是著名的Fibonacci数列 $\{F_k\} : 0, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ ，数列符合条件 $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ 。

请你利用所学线性代数知识，经过计算得到 F_k 的通项公式。

3

某中药厂用五种中草药(A-E),根据不同的比例配制成了非常容易储存的三种成药,各用量成分见表1(单位:克)。

表 1: 成药配方表

	1号成药	2号成药	3号成药
A	20	18	12
B	10	10	10
C	20	25	15
D	10	5	15
E	0	2	8

因为这三种成药比较容易储存,所以药厂希望,客户所订购的其他同样由成分A, B, C, D, E组成的中药都可以由着三种基本类型按一定比例混合而成。

3(续)

(1) 假如某医院要求的4号中药中的五种成分为16,10,21,9,4,试问三种成药应各占多少比例? 如果客户总共需要5kg新的中药,则三种类型各要多少?

(2) 如果医院要求的5号中药含A,B,C,D,E的成分为16,12,19,9,4,则这种中药能用以上三种成药配成吗? 为什么?

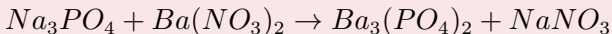
3(续)

(1) 假如某医院要求的4号中药中的五种成分为16,10,21,9,4, 试问三种成药应各占多少比例? 如果客户总共需要5kg新的中药, 则三种类型各要多少?

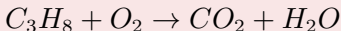
(2) 如果医院要求的5号中药含A,B,C,D,E的成分为16,12,19,9,4, 则这种中药能用以上三种成药配成吗? 为什么?

4

(1) 磷酸钠和硝酸钡溶液混合时产生磷酸钡沉淀和硝酸钠。请利用所学线性方程组知识, 配平如下化学方程式



(2) 燃烧丙烷时丙烷(C_3H_8)和氧气(O_2)结合, 生成 CO_2 和 H_2O 。请利用所学线性方程组知识, 配平如下化学方程式



5

假设一个经济体系由五金化工、石油能源和机械三个部门构成。化工部门销售30%的产出给石油部门和50%的产出给机械部门，保留余下的产出。石油部门销售80%的产出给化工部门和10%的产出给机械部门，保留余下的产出。机械部门销售40%的产出给化工部门和40%的产出给石油部门并保留余下的产出。求出该经济体系的一组平衡价格使得每个部门的收支平衡。

5

假设一个经济体系由五金化工、石油能源和机械三个部门构成。化工部门销售30%的产出给石油部门和50%的产出给机械部门，保留余下的产出。石油部门销售80%的产出给化工部门和10%的产出给机械部门，保留余下的产出。机械部门销售40%的产出给化工部门和40%的产出给石油部门并保留余下的产出。求出该经济体系的一组平衡价格使得每个部门的收支平衡。

6

考虑在某一地区某种传染病流行期的发展情况。该传染病可以治愈，但治愈者没有免疫力，可能因感染病毒而再次患病。假设开始时患病者占的比例为10%，且流行期健康者每天因感染病毒而患病的人数比例为常数20%，患病者每天治愈的比例为常数30%。那么，若干天后情况会怎样呢？

《线性代数》

应用题

数学与统计学
学院

目录

应用题

7

某学校为提高教师的业务水平,计划让教师进行分批脱产进修,假设学校目前在岗教师800人,正在脱产进修的有200人,现准备每年从在岗教师中选30%的人去进修,且每年正在进修的教师中有60%的人可以完成培训回到教学岗位中,若教师总人数不变,问一年后在岗教师及进修教师各有多少?两年后各有多少?并由此预测若干年后,学校在岗及进修教师各有多少?

7

某学校为提高教师的业务水平,计划让教师进行分批脱产进修,假设学校目前在岗教师800人,正在脱产进修的有200人,现准备每年从在岗教师中选30%的人去进修,且每年正在进修的教师中有60%的人可以完成培训回到教学岗位中,若教师总人数不变,问一年后在岗教师及进修教师各有多少?两年后各有多少?并由此预测若干年后,学校在岗及进修教师各有多少?

8

假定某地人口总数保持不变,每年有5%的农村人口流入城镇,有1%的城镇人口流入农村。利用所学线性代数的知识,说明该地的城镇人口与农村人口的分布最终是否会趋于一个“稳定状态”。

9

设简支梁如下图1所示，在梁的三个位置分别施加力 f_1 、 f_2 和 f_3 后，在该处产生的综合变形（通常称为挠度）为 y_1 、 y_2 和 y_3 。根据胡克定律，在材料未失去弹性的范围内，三个力与它引起的三个变形都呈线性关系，可以写出矩阵形式

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

(1) 若只施加一个力 f_1 ，其余两个力 $f_2 = f_3 = 0$ ，求力 f_1 在三处分别引起的挠度。

(2) 由(1)以及矩阵的乘法，说明元素 d_{ij} 的物理意义。

9(续)

(3) 若
$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.005 & 0.002 & 0.001 \\ 0.002 & 0.004 & 0.003 \\ 0.001 & 0.003 & 0.006 \end{pmatrix},$$
 且在三

处施加的力

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}, \text{ 求挠度。}$$

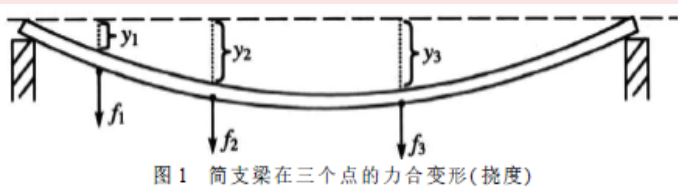


图1 简支梁在三个点的力合变形(挠度)

《线性代数》

应用题

数学与统计学院

目录

应用题

10

某农场饲养的某种动物所能达到的最大年龄为15岁，将其分成3个年龄组，第一组：0～5岁；第二组：6～10岁；第三组：11～15岁。动物从第二年龄组开始繁殖后代，经过长期统计，第二年龄组的动物在其年龄段平均繁殖4个后代，第三年龄组的动物在其年龄段平均繁殖平均繁殖3个后代，第一年龄组和第二年龄组的动物能顺利进入下一个年龄组的存活率分别为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{4}$ ，假设农场现有3个年龄段的动物各1000头，问15年后农场3个年龄段的动物各有多少头？由此推算经过 $5k$ 年后，农场各个年龄段的动物数量。

11

某调料公司用7种成分来制造6种调味品（见表）

每包调味品所需各成分的量(单位:克)

成分 调味品	调料					
	A	B	C	D	E	F
红辣椒	3	1.5	4.5	7.5	9	4.5
姜黄	2	4	0	8	1	6
胡椒	1	2	0	4	2	3
欧芹萝	1	2	0	4	1	3
大蒜粉	0.5	1	0	2	2	1.5
盐	0.5	1	0	2	2	1.5
丁香油	0.25	0.5	0	2	1	0.75

11(续)

(1) 一顾客为了避免购买全部6种调味制品, 他可以只够买其中一部分并用它们配制出其余几种调味品, 为了能配置出其余几种调味品, 这位顾客必须购买的最少的调味品的种类是多少? 写出所需最少的调味品的集合。

(2) 由(1)中所得到的最小调味品集合是否唯一?

(3) 用(1)中的最小调味品集合, 按下列成分配制一种新调味品, 写出需要调味品的包数。红辣椒:18, 姜黄:18, 胡椒:9, 欧莳萝:9, 大蒜粉:4.5, 盐:4.5, 丁香油:3.25。

(4) 另一顾客希望按下列成分表配制一种调味品, 他要购买的最小调味品集合是什么? 红辣椒:12, 姜黄:14, 胡椒:7, 欧莳萝:7, 大蒜粉:35, 盐:35, 丁香油:175。

(5) 在上述问题的解答中, 用到了那些线性代数课程的知识? 请列出所用知识点。

12

建筑用混凝土是由水泥、水、砂、石和灰五种原料按一定比例配制而成，不同的成分比例影响混凝土的特性。一般而言，水与水泥的比例影响混凝土的最终强度，砂与石的比例影响混凝土的易加工性，灰与水泥的比例影响混凝土的耐久性等。所以不同用途的混凝土需要不同的原料配比。

假定某混凝土生产企业的设备只能生产储存三种基本类型的混凝土，即超强型、通用型和长寿型。它们的配方如下：超强型A含水泥、水、砂、石、灰分别为20、10、20、10、0；通用型B含水泥、水、砂、石、灰分别为18、10、25、5、2；长寿型C含水泥、水、砂、石、灰分别为12、10、15、15、8。企业希望，客户所订购的其它混凝土都可以由这三种基本类型按一定比例混合而成。

(1) 假如某客户要求的混凝土的五种成分为16、10、21、9、4，问A,B,C三种类型的混凝土各占多少比例？如果客户需要这种混凝土200T，则三种混凝土各需要多少T？

(2) 如果客户要求的成分为30、57、69、7、80，它能用A,B,C三种类型配成吗？若不能，你能给出一种调整A,B,C成分的方案，使之能满足客户要求吗？

13

我校本地学生周末有回家和在校两种选择。统计数据显示，本周末回家的学生，下周末回家的几率为 $\frac{2}{5}$ ，本周末在校的学生下周末在校的几率是 $\frac{1}{5}$ 。已知第一周周末有30%本地学生回家。

- (1) 求第二周周末本地学生回家的比率。
- (2) 求第五周周末本地学生回家的比率。并利用此线性代数知识，估计学期末（第十八周）周末本地学生回家的比率。

13

我校本地学生周末有回家和在校两种选择。统计数据显示，本周末回家的学生，下周末回家的几率为 $\frac{2}{5}$ ，本周末在校的学生下周末在校的几率是 $\frac{1}{5}$ 。已知第一周周末有30%本地学生回家。

- (1) 求第二周周末本地学生回家的比率。
- (2) 求第五周周末本地学生回家的比率。并利用此线性代数知识，估计学期末（第十八周）周末本地学生回家的比率。

14

宿州市有苏果和家乐福两家超市相互竞争，假设苏果每月保有 $\frac{1}{4}$ 的顾客，而 $\frac{3}{4}$ 转移向家乐福；每月家乐福保有 $\frac{2}{3}$ 的顾客，而 $\frac{1}{3}$ 转移向苏果。假设苏果年初占有 $\frac{3}{5}$ 的顾客，家乐福占有 $\frac{2}{5}$ 的顾客。

- (1) 问2月初两家超市的顾客占有比例是多少？
- (2) 年底两家超市的顾客占有比例是多少？并由此预测若干年后，两家超市顾客占有率的发展趋势。

《线性代数》

应 用 题

数学与统计学
院

目 录

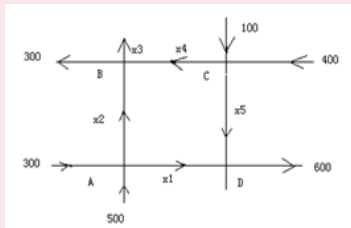
应 用 题

15

(李政道问题) 一堆苹果要分给5只猴子, 第一只猴子来了, 把苹果分成5堆, 还多一个扔了, 自己拿走一堆。第二只猴子来了, 又把苹果分成5堆, 又多一个扔了, 自己拿走一堆, 以后每只猴子来了, 都如此办理。问原来至少有多少苹果, 最后至少有多少苹果?

16

下图是宿州市某日单位时段内四条主要干道单向车辆的流量图。



请利用所学线性代数知识，解决以下问题。

- (1) 给出图中所有流量的满足的关系式。
- (2) 由于道路设施等原因，图中 x_1 至 x_5 的单位时段内的车流量最大不能超过500。请利用线性方程组理论，说明如何控制 x_1 至 x_5 中的某一个流量，使得5个路段的单位时间内流量 x_1 至 x_5 都不超过500。

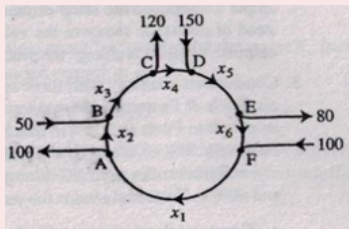
17

学校附近有三家餐馆，一家是川菜，一家是湘菜，还有一家快餐。假设每个周末在食堂的学生中有20%下次吃相菜，25%下次吃快餐，还有30%下次吃川菜；吃湘菜的学生中有20%在食堂吃，20%下次吃快餐，还有30%下次吃川菜；而吃快餐的学生中有25%的下次在食堂吃，25%的下次吃相菜，10%的下次吃川菜；对于吃川菜的学生，30%的下次在食堂吃，30%的下次吃相菜，10%的下次吃快餐。我们把这样的整个事件称为一个系统。而某个学生在四个地方的任何一个地方吃饭,被称为状态。在这个例子里，有四个状态。

请利用所学线性代数知识，估计系统状态的稳定性。即经过若干周以后，四种状态中学生比例的大致情况。

18

下图是一个“左行环岛”某一时段的车流量示意图。

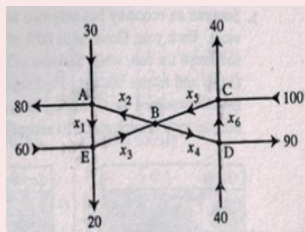


请利用所学线性代数知识，解决以下问题。

- (1) 给出图中所有流量的满足的关系式。
- (2) 由于道路设施等原因，图中环岛 x_1 至 x_6 路段单位时段内的车流量最大不能超过200。请利用线性方程组理论，说明如何控制 x_1 至 x_6 中的某一个流量，使得6个路段的单位时间内流量 x_1 至 x_6 都不超过200。
- (3) 由于道路施工， x_4 路段封闭，这时保证道路畅通的各路段车流量是多少？

19

下图是某一单行高速立交桥某时段的的车流量示意图。



请利用所学线性代数知识，解决以下问题。

- (1) 给出图中所有流量的满足的关系式。
- (2) 由计算结果说明，路段 x_2, x_3, x_4, x_5 中的任何一条都不能封闭。即路段 x_2, x_3, x_4, x_5 中任何一段需要封闭施工，都必须封闭整个立交桥。
- (3) 由计算结果，说明路段 x_1 或路段 x_6 可以封闭施工。即路段 x_1 或路段 x_6 封闭施工时，立交桥可以正常通行。

20

某食品厂收到2000kg食品的订单，要求食品中含脂肪5%，碳水化合物12%，蛋白质15%。该厂准备用5种原材料配制这种食品，其中每一种原材料含脂肪、碳水化合物、蛋白质的百分比和每千克的成本（元）如下表所示：

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
脂肪	8	6	3	2	4
碳水化合物	5	25	10	15	5
蛋白质	15	5	20	10	10
每千克成本	4.4	2	2.4	2.8	3.2

- (1) 用上述五种原材料能不能配制2000kg的这种食品？如果能够，那么解释唯一的吗？写出它的所有解。
- (2) 对于第1小题，写出所花费的成本的表达式，并求每一种原材料用多少量时成本最低（有的原材料可以不用）。

《线性代数》

应 用 题

数学与统计学
院

目 录

应 用 题

20(续)

(3) 用 A_1, A_2, A_3, A_4 这4种原材料能配制2000kg这种食品吗? 如果能够, 它的解是唯一的吗? 求出这时所花费的成本。

(4) 用 A_2, A_3, A_4, A_5 这4种原材料能配制2000kg这种食品吗?

(5) 用 A_3, A_4, A_5 这3种原材料能配制2000kg这种食品吗?

Thank you!

AUTHOR: **Ning Qun**

ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China

EMAIL: Ning.qun@163.com