线性代数
第三章：向量空间
习 题 解 答

宿州学院　数学与统计学院

目录

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

1.解

习题3.5($P_{118} - P_{122}$)

1.解 (1)以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

1.解 (1)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-3&1\\1&-1&2&-1\\4&-4&3&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&-1&-3&1\\0&0&1&-10\\0&0&0&48\end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

1.解 (1)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 4 & -4 & 3 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & -1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 48\end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有3个主元，所以向量组的秩为3；

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

1.解 (1)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 4 & -4 & 3 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & -1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 48\end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有3个主元，所以向量组的秩为3；

主元在第1、3、4列，所以$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$是其极大线性无关组.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

1.解 (1)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-3&1\\1&-1&2&-1\\4&-4&3&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&-1&-3&1\\0&0&1&-10\\0&0&0&48\end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有3个主元，所以向量组的秩为3；

主元在第1、3、4列，所以$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$是其极大线性无关组.

(2)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

1.解 (1)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-3&1\\1&-1&2&-1\\4&-4&3&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&-1&-3&1\\0&0&1&-10\\0&0&0&48\end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有3个主元，所以向量组的秩为3；

主元在第1、3、4列，所以$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$是其极大线性无关组.

(2)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}-1&4&2&0\\5&1&0&3\\3&-2&-1&4\\-2&9&4&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}-1&4&2&0\\0&1&0&-5\\0&0&5&54\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

阶梯形矩阵中有3个主元，所以向量组的秩为3；

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

阶梯形矩阵中有3个主元，所以向量组的秩为3；
主元在第1、2、3列，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是其极大线性无关组.

习题3.5($P_{118} - P_{122}$)

阶梯形矩阵中有3个主元，所以向量组的秩为3；

主元在第1、2、3列，所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是其极大线性无关组.

(3)以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

阶梯形矩阵中有3个主元，所以向量组的秩为3；

主元在第1、2、3列，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是其极大线性无关组.

(3)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&3&-1&1\\-1&-7&-3&-9\\2&8&0&6\\3&9&-3&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&3&-1&1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

阶梯形矩阵中有3个主元，所以向量组的秩为3；

主元在第1、2、3列，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是其极大线性无关组.

(3)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 1\\ -1 & -7 & -3 & -9\\ 2 & 8 & 0 & 6\\ 3 & 9 & -3 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有2个主元，所以向量组的秩为2；

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

阶梯形矩阵中有3个主元，所以向量组的秩为3；

主元在第1、2、3列，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是其极大线性无关组.

(3)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -7 & -3 & -9 \\ 2 & 8 & 0 & 6 \\ 3 & 9 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有2个主元，所以向量组的秩为2；

主元在第1、2列，所以α_1,α_2是其极大线性无关组.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(4)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(4)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(4)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&2&5\\-2&-5&1&-1&-8\\0&-3&3&4&1\\3&6&0&-7&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&2&5\\0&-1&1&3&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有3个主元，所以向量组的秩为3;

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(4)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&2&5\\-2&-5&1&-1&-8\\0&-3&3&4&1\\3&6&0&-7&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&2&5\\0&-1&1&3&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有3个主元，所以向量组的秩为3；

主元在第1、2、4列，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$是其极大线性无关组.

习题3.5$(P_{118}-P_{122})$

2.解

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

2.解 (1)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

2.解 (1)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\1&1&-2&3\\3&-1&8&1\\1&3&-9&7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

2.解 (1)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\1&1&-2&3\\3&-1&8&1\\1&3&-9&7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}&1\\0&1&-\frac{7}{2}&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

2.解 (1)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\1&1&-2&3\\3&-1&8&1\\1&3&-9&7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}&1\\0&1&-\frac{7}{2}&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有2个主元，所以向量组的秩为2；

习题3.5$(P_{118}-P_{122})$

2.解 (1)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\1&1&-2&3\\3&-1&8&1\\1&3&-9&7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}&1\\0&1&-\frac{7}{2}&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有2个主元，所以向量组的秩为2；

主元在第1、2列，所以α_1,α_2是其极大线性无关组.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

2.解 (1)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\1&1&-2&3\\3&-1&8&1\\1&3&-9&7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}&1\\0&1&-\frac{7}{2}&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有2个主元，所以向量组的秩为2；

主元在第1、2列，所以α_1,α_2是其极大线性无关组.

且$\alpha_3=\frac{3}{2}\alpha_1-\frac{7}{2}\alpha_2$，

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

2.解 (1)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\1&1&-2&3\\3&-1&8&1\\1&3&-9&7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}&1\\0&1&-\frac{7}{2}&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有2个主元，所以向量组的秩为2；

主元在第1、2列，所以α_1,α_2是其极大线性无关组.

且$\alpha_3=\frac{3}{2}\alpha_1-\frac{7}{2}\alpha_2$，$\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2$.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(2)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(2)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\1&-1&3&-2&-1\\2&1&3&5&-5\\3&1&5&6&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(2)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\1&-1&3&-2&-1\\2&1&3&5&-5\\3&1&5&6&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2&1&-2\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(2)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\1&-1&3&-2&-1\\2&1&3&5&-5\\3&1&5&6&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2&1&-2\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有2个主元，所以向量组的秩为2；

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(2)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\1&-1&3&-2&-1\\2&1&3&5&-5\\3&1&5&6&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2&1&-2\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有2个主元，所以向量组的秩为2；

主元在第1、2列，所以α_1,α_2是其极大线性无关组.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(2)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\1&-1&3&-2&-1\\2&1&3&5&-5\\3&1&5&6&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2&1&-2\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有2个主元，所以向量组的秩为2；

主元在第1、2列，所以α_1,α_2是其极大线性无关组.

且$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$，

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(2)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\1&-1&3&-2&-1\\2&1&3&5&-5\\3&1&5&6&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2&1&-2\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有2个主元，所以向量组的秩为2；

主元在第1、2列，所以α_1,α_2是其极大线性无关组.

且$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2$，

习题3.5$(P_{118}-P_{122})$

(2)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\1&-1&3&-2&-1\\2&1&3&5&-5\\3&1&5&6&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2&1&-2\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有2个主元，所以向量组的秩为2；

主元在第1、2列，所以α_1,α_2是其极大线性无关组.

且$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2$，$\alpha_5=-2\alpha_1-\alpha_2$.

习题3.5$(P_{118}-P_{122})$

3.解

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

3.解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&t\\1&t&1\\t&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&t\\0&t-1&1-t\\0&0&2-t-t^2\end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

3.解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&t\\1&t&1\\t&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&t\\0&t-1&1-t\\0&0&2-t-t^2\end{pmatrix}$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为2，阶梯形矩阵中应该有2个主元，

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

3.解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&t\\1&t&1\\t&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&t\\0&t-1&1-t\\0&0&2-t-t^2\end{pmatrix}$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为2，阶梯形矩阵中应该有2个主元，

所以，$\begin{cases}t-1\neq 0\\2-t-t^2=0\end{cases}$ 或者$\begin{cases}t-1=0\\2-t-t^2\neq 0\end{cases}$，

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

3.解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&t\\1&t&1\\t&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&t\\0&t-1&1-t\\0&0&2-t-t^2\end{pmatrix}$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为2，阶梯形矩阵中应该有2个主元，

所以，$\begin{cases}t-1\neq 0\\2-t-t^2=0\end{cases}$ 或者$\begin{cases}t-1=0\\2-t-t^2\neq 0\end{cases}$，

求得$t=-2$.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

4.解

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

4.解 (1)对已知矩阵实施初等行变换，化为阶梯形矩阵.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

4.解 (1)对已知矩阵实施初等行变换，化为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 36 & -49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

4.解 (1)对已知矩阵实施初等行变换，化为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 36 & -49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有3个主元，所以矩阵的秩为3；

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

4.解 (1)对已知矩阵实施初等行变换，化为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 36 & -49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有3个主元，所以矩阵的秩为3；

主元在第1、2、3列，所以 $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ 是其极大线性无关组.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(2)对已知矩阵实施初等行变换，化为阶梯形矩阵.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(2)对已知矩阵实施初等行变换，化为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(2)对已知矩阵实施初等行变换，化为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有3个主元，所以矩阵的秩为3；

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(2)对已知矩阵实施初等行变换，化为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有3个主元，所以矩阵的秩为3；

主元在第1、2、4列，所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是其极大线性无关组.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(3)对已知矩阵实施初等行变换，化为阶梯形矩阵.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(3)对已知矩阵实施初等行变换，化为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(3)对已知矩阵实施初等行变换，化为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有4个主元，所以矩阵的秩为4；

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(3)对已知矩阵实施初等行变换，化为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有4个主元，所以矩阵的秩为4；

主元在第1、2、3、4列，所以

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$是其极大线性无关组.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

5.解

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

5.解 对已知矩阵实施初等行变换，化为阶梯形矩阵.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

5.解 对已知矩阵实施初等行变换，化为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -3\lambda-\lambda^2 & -\lambda^2-2\lambda+3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (-\lambda+1)(\lambda+3) \end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

5.解 对已知矩阵实施初等行变换，化为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -3\lambda-\lambda^2 & -\lambda^2-2\lambda+3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (-\lambda+1)(\lambda+3) \end{pmatrix}$$

$\lambda=0$时，秩为2；

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

5.解 对已知矩阵实施初等行变换，化为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -3\lambda-\lambda^2 & -\lambda^2-2\lambda+3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (-\lambda+1)(\lambda+3) \end{pmatrix}$$

$\lambda=0$时，秩为2；$\lambda=-3$ 时，秩为2；

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

5.解 对已知矩阵实施初等行变换，化为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -3\lambda-\lambda^2 & -\lambda^2-2\lambda+3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (-\lambda+1)(\lambda+3) \end{pmatrix}$$

$\lambda=0$时，秩为2；$\lambda=-3$ 时，秩为2；$\lambda\neq 0$且$\lambda\neq -3$时，秩为3.

习题3.5($P_{118} - P_{122}$)

6.解

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

6.解 对已知矩阵实施初等行变换，化为阶梯形矩阵.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

6.解 对已知矩阵实施初等行变换，化为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118} - P_{122}$)

6.解 对已知矩阵实施初等行变换，化为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

当$a=1$时，阶梯形中有2个主元，秩为2;

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

6.解 对已知矩阵实施初等行变换，化为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

当$a=1$时，阶梯形中有2个主元，秩为2；

当$a\neq 1$时，阶梯形中有3个主元，秩为3.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

6.解 对已知矩阵实施初等行变换，化为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

当$a=1$时，阶梯形中有2个主元，秩为2；

当$a\neq 1$时，阶梯形中有3个主元，秩为3.

7.解

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

6.解 对已知矩阵实施初等行变换，化为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

当$a=1$时，阶梯形中有2个主元，秩为2；

当$a\neq 1$时，阶梯形中有3个主元，秩为3.

7.解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$为列构作矩阵$\overline{A}$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

6.解 对已知矩阵实施初等行变换，化为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

当$a=1$时，阶梯形中有2个主元，秩为2；

当$a\neq 1$时，阶梯形中有3个主元，秩为3.

7.解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$为列构作矩阵$\overline{A}$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & -4-a & -2-a & 2-ab \\ 0 & 0 & -1 & c-5b \end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(1) 当$-4-a\neq 0, a\neq -4$时，$\overline{A}$有3个主元且最后一列无主元，则β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一的线性表出；

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(1) 当$-4-a\neq 0, a\neq -4$时，$\overline{A}$有3个主元且最后一列无主元，则β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一的线性表出；

(2) 当$-4-a=0, a=-4$时，矩阵

$$\overline{A}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}2&1&1&b\\0&0&1&1-2b\\0&0&0&1+c-3b\end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(1) 当$-4-a\neq 0, a\neq -4$时，$\overline{A}$有3个主元且最后一列无主元，则β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一的线性表出；

(2) 当$-4-a=0, a=-4$时，矩阵

$$\overline{A}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1 & 1-2b\\ 0 & 0 & 0 & 1+c-3b\end{pmatrix}$$

这时，若$1+c-3b\neq 0$，则β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(1) 当$-4-a\neq 0, a\neq -4$时，$\overline{A}$有3个主元且最后一列无主元，则β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一的线性表出；

(2) 当$-4-a=0, a=-4$时，矩阵

$$\overline{A}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}2&1&1&b\\0&0&1&1-2b\\0&0&0&1+c-3b\end{pmatrix}$$

这时，若$1+c-3b\neq 0$，则β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.即，$a=-4$且$1+c-3b\neq 0$时，$\beta$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(1) 当$-4-a\neq 0, a\neq -4$时，$\overline{A}$有3个主元且最后一列无主元，则β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一的线性表出；

(2) 当$-4-a=0, a=-4$时，矩阵

$$\overline{A}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}2&1&1&b\\0&0&1&1-2b\\0&0&0&1+c-3b\end{pmatrix}$$

这时，若$1+c-3b\neq 0$，则β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.即，$a=-4$且$1+c-3b\neq 0$时，$\beta$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

8.解

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(1) 当$-4-a\neq 0, a\neq -4$时，$\overline{A}$有3个主元且最后一列无主元，则β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一的线性表出；

(2) 当$-4-a=0, a=-4$时，矩阵

$$\overline{A}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1 & 1-2b\\ 0 & 0 & 0 & 1+c-3b\end{pmatrix}$$

这时，若$1+c-3b\neq 0$，则β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.即，$a=-4$且$1+c-3b\neq 0$时，$\beta$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

8.解 以$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$\overline{A}$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

(1) 当$-4-a\neq 0, a\neq -4$时，$\overline{A}$有3个主元且最后一列无主元，则β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一的线性表出；

(2) 当$-4-a=0, a=-4$时，矩阵

$$\overline{A}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}2&1&1&b\\0&0&1&1-2b\\0&0&0&1+c-3b\end{pmatrix}$$

这时，若$1+c-3b\neq 0$，则β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.即，$a=-4$且$1+c-3b\neq 0$时，$\beta$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

8.解 以$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$\overline{A}$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-2&1&1&a\\1&a&a&1&a&1\\a&4&a&a&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}$$

习题3.5$(P_{118}-P_{122})$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & a \\ 0 & a+2 & a+2 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & a-4 & 0 & 3-3a & -a^2+2a-1 \end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & a \\ 0 & a+2 & a+2 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & a-4 & 0 & 3-3a & -a^2+2a-1 \end{pmatrix}$$

当$a\neq -2$且$a\neq 4$时，矩阵$\overline{A}$有3个主元，且主元在第1、2、3列，所以第4、5、6列对应的向量可以由第1、2、3列对应的列向量线性表出(且表示唯一).

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & a \\ 0 & a+2 & a+2 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & a-4 & 0 & 3-3a & -a^2+2a-1 \end{pmatrix}$$

当$a \neq -2$且$a \neq 4$时，矩阵$\overline{A}$有3个主元，且主元在第1、2、3列，所以第4、5、6列对应的向量可以由第1、2、3列对应的列向量线性表出(且表示唯一).

即，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$可以由$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性表出(且表出唯一).

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & a \\ 0 & a+2 & a+2 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & a-4 & 0 & 3-3a & -a^2+2a-1 \end{pmatrix}$$

当$a \neq -2$且$a \neq 4$时，矩阵$\overline{A}$有3个主元，且主元在第1、2、3列，所以第4、5、6列对应的向量可以由第1、2、3列对应的列向量线性表出(且表示唯一).

即，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$可以由$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性表出(且表出唯一).

$a = -2$时，矩阵$\overline{A}$有3个主元，但主元出现在了第5列，这时α_2不能由$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性表出；

习题3.5$(P_{118}-P_{122})$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & a \\ 0 & a+2 & a+2 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & a-4 & 0 & 3-3a & -a^2+2a-1 \end{pmatrix}$$

当$a\neq -2$且$a\neq 4$时，矩阵$\overline{A}$有3个主元，且主元在第1、2、3列，所以第4、5、6列对应的向量可以由第1、2、3列对应的列向量线性表出(且表示唯一).

即，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表出(且表出唯一).

$a=-2$时，矩阵$\overline{A}$有3个主元，但主元出现在了第5列，这时α_2不能由β_1,β_2,β_3线性表出；

$a=4$时，矩阵$\overline{A}$有3个主元，但主元出现在了第5列，这时α_2不能由β_1,β_2,β_3线性表出.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$为列构作矩阵$\overline{B}$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$为列构作矩阵$\overline{B}$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$\overline{B}=\begin{pmatrix}1&1&a&1&-2&-2\\1&a&1&1&a&a\\a&1&1&a&4&a\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&a&1&-2&-2\\0&a-1&1-a&0&a+2&a+2\\0&0&2-a-a^2&0&6+3a&2+4a\end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$为列构作矩阵$\overline{B}$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$\overline{B}=\begin{pmatrix}1&1&a&1&-2&-2\\1&a&1&1&a&a\\a&1&1&a&4&a\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&a&1&-2&-2\\0&a-1&1-a&0&a+2&a+2\\0&0&2-a-a^2&0&6+3a&2+4a\end{pmatrix}$$

$a=1$时，$\overline{B}$有3个主元且第5、6列出现了主元，这时β_2,β_3不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出；

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$为列构作矩阵$\overline{B}$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$\overline{B}=\begin{pmatrix}1&1&a&1&-2&-2\\1&a&1&1&a&a\\a&1&1&a&4&a\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&a&1&-2&-2\\0&a-1&1-a&0&a+2&a+2\\0&0&2-a-a^2&0&6+3a&2+4a\end{pmatrix}$$

$a=1$时，$\overline{B}$有3个主元且第5、6列出现了主元，这时β_2,β_3不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出；

$a=-2$时，$\overline{B}$有3个主元且第6列出现了主元，这时β_3不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出；

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

$a\neq 1$且$a\neq -2$时，$\overline{B}$有3个主元且主元在第1、2、3列，β_1,β_2,β_3可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

$a\neq 1$且$a\neq -2$时，$\overline{B}$有3个主元且主元在第1、2、3列，β_1,β_2,β_3可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

综上，$a=1$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表出，且$\beta_1,\beta_2,\beta_3$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

$a \neq 1$且$a \neq -2$时，$\overline{B}$有3个主元且主元在第1、2、3列，$\beta_1, \beta_2, \beta_3$可以由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表出.

综上，$a = 1$时，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$可以由$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性表出，且$\beta_1, \beta_2, \beta_3$不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表出.

9.解

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

$a\neq 1$且$a\neq -2$时，$\overline{B}$有3个主元且主元在第1、2、3列，β_1,β_2,β_3可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

综上，$a=1$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表出，且$\beta_1,\beta_2,\beta_3$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

9.解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$为列构作矩阵$\overline{A}$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

$a\neq 1$且$a\neq -2$时，$\overline{B}$有3个主元且主元在第1、2、3列，β_1,β_2,β_3可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

综上，$a=1$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表出，且$\beta_1,\beta_2,\beta_3$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

9.解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$为列构作矩阵$\overline{A}$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\2&3&a+2&a+3&a+6&a+4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

$a\neq 1$且$a\neq -2$时，$\overline{B}$有3个主元且主元在第1、2、3列，β_1,β_2,β_3可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

综上，$a=1$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表出，且$\beta_1,\beta_2,\beta_3$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

9.解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$为列构作矩阵$\overline{A}$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\2&3&a+2&a+3&a+6&a+4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}$$
$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\0&0&a+1&a-1&a+1&a-1\end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

$a\neq-1$时，$\overline{A}$有3个主元在第1、2、3列，这时β_1,β_2,β_3可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出(且表出唯一)；

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

$a\neq -1$时，$\overline{A}$有3个主元在第1、2、3列，这时β_1,β_2,β_3可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出(且表出唯一)；

$a=-1$时，$\overline{A}$有3个主元且第4列有主元，这时β_1不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

$a\neq -1$时，$\overline{A}$有3个主元在第1、2、3列，这时β_1,β_2,β_3可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出(且表出唯一)；

$a=-1$时，$\overline{A}$有3个主元且第4列有主元，这时β_1不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

以$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$\overline{B}$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

$a\neq -1$时，$\overline{A}$有3个主元在第1、2、3列，这时β_1,β_2,β_3可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出(且表出唯一)；

$a=-1$时，$\overline{A}$有3个主元且第4列有主元，这时β_1不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

以$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$\overline{B}$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$\overline{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ a+3 & a+6 & a+4 & 2 & 3 & a+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

$a\neq -1$时，$\overline{A}$有3个主元在第1、2、3列，这时β_1,β_2,β_3可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出(且表出唯一)；

$a=-1$时，$\overline{A}$有3个主元且第4列有主元，这时β_1不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

以$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$\overline{B}$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$\overline{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ a+3 & a+6 & a+4 & 2 & 3 & a+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{1}{3}a-1 & -\frac{2}{3}a & a-1 \end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

$\overline{B}$有3个主元且在第1、2、3列，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表出.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

$\overline{B}$有3个主元且在第1、2、3列，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表出.

综上，当$a\neq-1$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$等价；

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

$\overline{B}$有3个主元且在第1、2、3列，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表出.

综上，当$a\neq-1$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$等价；

当$a=-1$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$不等价.

习题3.5$(P_{118}-P_{122})$

$\overline{B}$有3个主元且在第1、2、3列，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表出.

综上，当$a\neq -1$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$等价；

当$a=-1$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$不等价.

10.解

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

$\overline{B}$有3个主元且在第1、2、3列，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表出.

综上，当$a\neq -1$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$等价；

当$a=-1$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$不等价.

10.解 以$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$\overline{A}$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

$\overline{B}$有3个主元且在第1、2、3列，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表出.

综上，当$a\neq-1$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$等价；

当$a=-1$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$不等价.

10.解 以$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$\overline{A}$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\a&2&3&0&1&3\\1&3&5&1&1&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

$\overline{B}$有3个主元且在第1、2、3列，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表出.

综上，当$a\neq -1$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$等价；

当$a=-1$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$不等价.

10.解 以$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$\overline{A}$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\a&2&3&0&1&3\\1&3&5&1&1&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\0&2&4&0&1&4\\0&0&a-1&-a&\frac{1}{2}a&a-1\end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

当$a\neq 1$时，$\overline{A}$有3个主元且在第1、2、3列，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表出(且表出唯一)；

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

当$a\neq 1$时，$\overline{A}$有3个主元且在第1、2、3列，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表出(且表出唯一)；

当$a=1$时，$\overline{A}$有3个主元且在第4列，α_1不能由β_1,β_2,β_3线性表出.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

当$a\neq 1$时，$\overline{A}$有3个主元且在第1、2、3列，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表出(且表出唯一)；

当$a=1$时，$\overline{A}$有3个主元且在第4列，α_1不能由β_1,β_2,β_3线性表出.

(1)所求a的值为$a=1$.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

当$a\neq 1$时，$\overline{A}$有3个主元且在第1、2、3列，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表出(且表出唯一)；

当$a=1$时，$\overline{A}$有3个主元且在第4列，α_1不能由β_1,β_2,β_3线性表出.

(1)所求a的值为$a=1$.

(2)在$a=1$时，以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$为列构作矩阵$\overline{B}$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

当$a\neq 1$时，$\overline{A}$有3个主元且在第1、2、3列，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表出(且表出唯一)；

当$a=1$时，$\overline{A}$有3个主元且在第4列，α_1不能由β_1,β_2,β_3线性表出.

(1)所求a的值为$a=1$.

(2)在$a=1$时，以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$为列构作矩阵$\overline{B}$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&1\\0&1&3&1&2&3\\1&1&5&1&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&1\\0&1&3&1&2&3\\0&0&1&-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&0\\0&1&0&4&2&0\\0&0&1&-1&0&1\end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

所以，$\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$，

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

所以，$\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$，

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

所以，$\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_3$.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

所以，$\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_3$.

11.解

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

所以，$\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_3$.

11.解 对方程组的增广矩阵$\overline{A}$进行初等行变换，化为阶梯形.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

所以，$\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_3$.

11.解 对方程组的增广矩阵$\overline{A}$进行初等行变换，化为阶梯形.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}-2&1&1&-2\\1&-2&1&\lambda\\1&1&-2&\lambda^2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&-2&\lambda^2\\0&3&-3&\lambda^2-\lambda\\0&0&0&(\lambda-1)(\lambda+2)\end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

所以，$\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_3$.

11.解 对方程组的增广矩阵$\overline{A}$进行初等行变换，化为阶梯形.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}-2&1&1&-2\\1&-2&1&\lambda\\1&1&-2&\lambda^2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&-2&\lambda^2\\0&3&-3&\lambda^2-\lambda\\0&0&0&(\lambda-1)(\lambda+2)\end{pmatrix}$$

由$\overline{A}$的阶梯形知，当$\lambda=1$或者$\lambda=-2$时，方程组有解且有无穷多解.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

所以，$\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_3$.

11.解 对方程组的增广矩阵$\overline{A}$进行初等行变换，化为阶梯形.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}-2&1&1&-2\\1&-2&1&\lambda\\1&1&-2&\lambda^2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&-2&\lambda^2\\0&3&-3&\lambda^2-\lambda\\0&0&0&(\lambda-1)(\lambda+2)\end{pmatrix}$$

由$\overline{A}$的阶梯形知，当$\lambda=1$或者$\lambda=-2$时，方程组有解且有无穷多解.

$\lambda\neq1$且$\lambda\neq-2$时，方程组无解.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

所以，$\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_3$.

11.解 对方程组的增广矩阵$\overline{A}$进行初等行变换，化为阶梯形.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & \lambda^2\\ 0 & 3 & -3 & \lambda^2-\lambda\\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2)\end{pmatrix}$$

由$\overline{A}$的阶梯形知，当$\lambda=1$或者$\lambda=-2$时，方程组有解且有无穷多解.

$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -2$时，方程组无解.

在$\lambda=1$时，将$\overline{A}$进一步化为规范阶梯形.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

所以，$\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_3$.

11.解 对方程组的增广矩阵$\overline{A}$进行初等行变换，化为阶梯形.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}-2&1&1&-2\\1&-2&1&\lambda\\1&1&-2&\lambda^2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&-2&\lambda^2\\0&3&-3&\lambda^2-\lambda\\0&0&0&(\lambda-1)(\lambda+2)\end{pmatrix}$$

由$\overline{A}$的阶梯形知，当$\lambda=1$或者$\lambda=-2$时，方程组有解且有无穷多解.

$\lambda\neq1$且$\lambda\neq-2$时，方程组无解.

在$\lambda=1$时，将$\overline{A}$进一步化为规范阶梯形.

$$\overline{A}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

所以，$\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_3$.

11.解 对方程组的增广矩阵$\overline{A}$进行初等行变换，化为阶梯形.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}-2&1&1&-2\\1&-2&1&\lambda\\1&1&-2&\lambda^2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&-2&\lambda^2\\0&3&-3&\lambda^2-\lambda\\0&0&0&(\lambda-1)(\lambda+2)\end{pmatrix}$$

由$\overline{A}$的阶梯形知，当$\lambda=1$或者$\lambda=-2$时，方程组有解且有无穷多解.

$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -2$时，方程组无解.

在$\lambda=1$时，将$\overline{A}$进一步化为规范阶梯形.

$$\overline{A}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}，\text{通解为}\begin{cases}x_1=1+x_3\\x_2=x_3\end{cases}.$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

在$\lambda=-2$时，将$\overline{A}$进一步化为规范阶梯形.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

在$\lambda=-2$时，将$\overline{A}$进一步化为规范阶梯形.

$$\overline{A}\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

在$\lambda=-2$时，将$\overline{A}$进一步化为规范阶梯形.

$$\overline{A}\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}，\text{通解为}\begin{cases}x_1=2+x_3\\x_2=2+x_3\end{cases}.$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

在$\lambda=-2$时，将$\overline{A}$进一步化为规范阶梯形.

$$\overline{A}\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}，\text{通解为}\begin{cases}x_1=2+x_3\\x_2=2+x_3\end{cases}.$$

12.解

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

在$\lambda=-2$时，将$\overline{A}$进一步化为规范阶梯形.

$$\overline{A}\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}，\text{通解为}\begin{cases}x_1=2+x_3\\x_2=2+x_3\end{cases}.$$

12.解 对方程组的增广矩阵$\overline{A}$进行初等行变换，化为阶梯形.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

在$\lambda=-2$时，将$\overline{A}$进一步化为规范阶梯形.

$$\overline{A}\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}，\text{通解为}\begin{cases}x_1=2+x_3\\x_2=2+x_3\end{cases}.$$

12.解 对方程组的增广矩阵$\overline{A}$进行初等行变换，化为阶梯形.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}2-\lambda&2&-2&1\\2&5-\lambda&-4&2\\-2&-4&5-\lambda&-\lambda-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}$$

$$\begin{pmatrix}-2&-4&5-\lambda&-1-\lambda\\0&1-\lambda&1-\lambda&1-\lambda\\0&0&\frac{1}{2}(10-\lambda)(1-\lambda)&\frac{1}{2}(4-\lambda)(1-\lambda)\end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

当$\lambda=1$时，$\overline{A}$有1个主元，且常数列无主元，方程组有无穷多解.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

当$\lambda=1$时，$\overline{A}$有1个主元，且常数列无主元，方程组有无穷多解.通解为$x_1=-1-2x_2+2x_3$；

当$\lambda=10$时，$\overline{A}$有3个主元，且常数列有主元，方程组无解；

当$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq 10$时，$\overline{A}$有3个主元，且常数列无主元，方程组有唯一解.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

当$\lambda=1$时，$\overline{A}$有1个主元，且常数列无主元，方程组有无穷多解.通解为$x_1=-1-2x_2+2x_3$；

当$\lambda=10$时，$\overline{A}$有3个主元，且常数列有主元，方程组无解；

当$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq 10$时，$\overline{A}$有3个主元，且常数列无主元，方程组有唯一解.

14.解

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

当$\lambda=1$时，$\overline{A}$有1个主元，且常数列无主元，方程组有无穷多解.通解为$x_1=-1-2x_2+2x_3$；

当$\lambda=10$时，$\overline{A}$有3个主元，且常数列有主元，方程组无解；

当$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq 10$时，$\overline{A}$有3个主元，且常数列无主元，方程组有唯一解.

14.解 以$\alpha_4,\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

当$\lambda=1$时，$\overline{A}$有1个主元，且常数列无主元，方程组有无穷多解.通解为$x_1=-1-2x_2+2x_3$；

当$\lambda=10$时，$\overline{A}$有3个主元，且常数列有主元，方程组无解；

当$\lambda\neq1$且$\lambda\neq10$时，$\overline{A}$有3个主元，且常数列无主元，方程组有唯一解.

14.解 以$\alpha_4,\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&1&0\\c_4&c_3&c_2&c_1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&c_3+c_4&c_2&c_1\end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

当$\lambda=1$时，$\overline{A}$有1个主元，且常数列无主元，方程组有无穷多解.通解为$x_1=-1-2x_2+2x_3$；

当$\lambda=10$时，$\overline{A}$有3个主元，且常数列有主元，方程组无解；

当$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq 10$时，$\overline{A}$有3个主元，且常数列无主元，方程组有唯一解.

14.解 以$\alpha_4,\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$为列构作矩阵$A$，并对其进行初等行变换，化为阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ c_4 & c_3 & c_2 & c_1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & c_3+c_4 & c_2 & c_1\end{pmatrix}$$

由初等行变换之后的矩阵知，$\alpha_4,\alpha_3,\alpha_1$所在的列，至多只有两个主元，一定线性相关.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

15.以A,B,C,D,E,F所含成分为列构作矩阵

$$H=\begin{pmatrix} 3 & 1.5 & 4.5 & 7.5 & 9 & 4.5 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0.5 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1.5 \\ 0.5 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0 & 2 & 1 & 0.75 \end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

15.以A,B,C,D,E,F所含成分为列构作矩阵

$$H=\begin{pmatrix} 3 & 1.5 & 4.5 & 7.5 & 9 & 4.5 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0.5 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1.5 \\ 0.5 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0 & 2 & 1 & 0.75 \end{pmatrix}$$

(1)对H进行初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

$$H \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118} - P_{122}$)

$$H \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

H的阶梯形中有4个主元，所以H的列向量组的极大线性无关组含4个列向量，其余的2个可以由这四个组合得到.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

$$H\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&4&2&3\\0&3&-3&3&-2&3\\0&0&0&1&0.5&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2&0&0&1\\0&1&-1&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

H的阶梯形中有4个主元，所以H的列向量组的极大线性无关组含4个列向量，其余的2个可以由这四个组合得到. H的极大无关组分别是：A,B,D,E；A,C,D,E；A,D,E,F；B,C,D,E；B,D,E,F；C,D,E,F.

习题3.5($P_{118} - P_{122}$)

其余两列均可以由极大线性无关组线性表出，但在实际问题中，表出系数为负数时没有意义.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

其余两列均可以由极大线性无关组线性表出，但在实际问题中，表出系数为负数时没有意义.

经计算，取B,C,D,E，这时

$A=0.5C+0.5D+0E+0F$；$F=1.5C+0.5D+0E+0F$.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

其余两列均可以由极大线性无关组线性表出，但在实际问题中，表出系数为负数时没有意义.

经计算，取B,C,D,E，这时

$A=0.5C+0.5D+0E+0F$；$F=1.5C+0.5D+0E+0F$.

所以可以用B,C,D,E调出所有六种.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

其余两列均可以由极大线性无关组线性表出，但在实际问题中，表出系数为负数时没有意义.

经计算，取B,C,D,E，这时

$A=0.5C+0.5D+0E+0F$；$F=1.5C+0.5D+0E+0F$.

所以可以用B,C,D,E调出所有六种.

(2)由(1)知，H列的极大线性无关组中必含D,E，而A,B,C,F中的某两个被其余4个线性表出时，系数非负的只有A,F被B,C,D,E表出，

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

其余两列均可以由极大线性无关组线性表出，但在实际问题中，表出系数为负数时没有意义.

经计算，取B,C,D,E，这时

$A=0.5C+0.5D+0E+0F$；$F=1.5C+0.5D+0E+0F$.

所以可以用B,C,D,E调出所有六种.

(2)由(1)知，H列的极大线性无关组中必含D,E，而A,B,C,F中的某两个被其余4个线性表出时，系数非负的只有A,F被B,C,D,E表出，所以最小的调味品集是唯一的，它们是B,C,D,E.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

其余两列均可以由极大线性无关组线性表出，但在实际问题中，表出系数为负数时没有意义.

经计算，取B,C,D,E，这时

$A=0.5C+0.5D+0E+0F$；$F=1.5C+0.5D+0E+0F$.

所以可以用B,C,D,E调出所有六种.

(2)由(1)知，H列的极大线性无关组中必含D,E，而A,B,C,F中的某两个被其余4个线性表出时，系数非负的只有A,F被B,C,D,E表出，所以最小的调味品集是唯一的，它们是B,C,D,E.

(3)以B,C,D,E以及所需调味品成分为列构作矩阵K，并对K进行初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

习题3.5$(P_{118}-P_{122})$

$$K=\begin{pmatrix}1.5 & 4.5 & 7.5 & 9 & 18\\ 4 & 0 & 8 & 1 & 18\\ 2 & 0 & 4 & 2 & 9\\ 2 & 0 & 4 & 1 & 9\\ 1 & 0 & 2 & 2 & 4.5\\ 1 & 0 & 2 & 2 & 4.5\\ 0.5 & 0 & 2 & 1 & 3.25\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 2 & 4.5\\ 0 & 4.5 & 4.5 & 6 & 11.25\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 2.5\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.5\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

由K的规范阶梯形知，

所需调味品$=0A+2.5B+1.5C+D+0E+0F$，

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

由K的规范阶梯形知，

所需调味品$=0A+2.5B+1.5C+D+0E+0F$，

所以，配制此调味品，需要2.5包B，1.5包C，1包D.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

由K的规范阶梯形知，

所需调味品$=0A+2.5B+1.5C+D+0E+0F$，

所以，配制此调味品，需要2.5包B，1.5包C，1包D.

(4)以B,C,D,E以及所需调味品成分为列构作矩阵M，并对M进行初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

由K的规范阶梯形知，

所需调味品$=0A+2.5B+1.5C+D+0E+0F$，

所以，配制此调味品，需要2.5包B，1.5包C，1包D.

(4)以B,C,D,E以及所需调味品成分为列构作矩阵M，并对M进行初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

$$M=\begin{pmatrix}1.5 & 4.5 & 7.5 & 9 & 12\\ 4 & 0 & 8 & 1 & 18\\ 2 & 0 & 4 & 2 & 7\\ 2 & 0 & 4 & 1 & 7\\ 1 & 0 & 2 & 2 & 35\\ 1 & 0 & 2 & 2 & 35\\ 0.5 & 0 & 2 & 1 & 175\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

习题3.5($P_{118}-P_{122}$)

M的规范阶梯形中出现了主元，所以所给成分的调味品不可能由这6种调味品配制出来.

特别说明：教材原题第(3)小题中的数据有误，更正为：红辣椒18、黄姜18、胡椒9、欧莳萝9、大蒜粉4.5、盐4.5、丁香油3.25.

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com