线性代数
第三章：向量空间

宿州学院　数学与统计学院

目录

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是m个n 维向量构成的向量组.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是m个n 维向量构成的向量组.
关注向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$的线性组合

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

时系数$k_1, k_2, ..., k_m$的特征.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是m个n 维向量构成的向量组.
关注向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$的线性组合

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

时系数$k_1, k_2, \ldots, k_m$的特征.

因为当系数$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ 时,
有$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \cdots + 0\alpha_m = 0$ 成立.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 是m个n 维向量构成的向量组.
关注向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$的线性组合

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

时系数$k_1,k_2,...,k_m$的特征.

因为当系数$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时,
有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_m=0$ 成立.

由此产生的问题是：组合$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$
时，系数$k_1,k_2,...,k_m$ 是否一定要全取零？

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

先看两个例子.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

先看两个例子.在R^4(实数集上的四维向量空间)中，取

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

先看两个例子.在R^4(实数集上的四维向量空间)中，取

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\2\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\2\end{pmatrix},$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

(1)假设存在系数x_1, x_2, x_3，使得

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0,$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

(1)假设存在系数x_1, x_2, x_3，使得

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0,$$

即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = 0,$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

(1)假设存在系数x_1, x_2, x_3，使得

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0,$$

即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = 0,$$

也就是

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

由系数矩阵的初等行变换(高斯消元法)，求得齐次线性方程组有唯一的解。

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

由系数矩阵的初等行变换(高斯消元法)，求得齐次线性方程组有唯一的解。即，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是方程组唯一的解向量.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

由系数矩阵的初等行变换(高斯消元法)，求得齐次线性方程组有唯一的解。即，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是方程组唯一的解向量.

也就是说：

若$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$，则必有$x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

由系数矩阵的初等行变换(高斯消元法)，求得齐次线性方程组有唯一的解。即，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是方程组唯一的解向量.

也就是说：

若$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$，则必有$x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

即，只有当所有的系数x_1, x_2, x_3 全取0 时，才可以使

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$$

成立.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

由系数矩阵的初等行变换(高斯消元法)，求得齐次线性方程组有唯一的解。即，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是方程组唯一的解向量.

也就是说：

若$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$，则必有$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$

即，只有当所有的系数x_1, x_2, x_3 全取0 时，才可以使

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$$

成立.

再换句话说，

对任意不全为零的数x_1, x_2, x_3,都有$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 \neq 0.$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

(2)假设存在系数x_1, x_2, x_3，使得

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0,$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

(2)假设存在系数x_1, x_2, x_3，使得

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0,$$

即,

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\2\end{pmatrix} = 0,$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

(2)假设存在系数x_1, x_2, x_3，使得

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0,$$

即，

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\2\end{pmatrix} = 0,$$

也就是

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

由系数矩阵的初等行变换(高斯消元法)，求得齐次线性方程组有无穷多解，且通解为$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$，其中$x_3$为自由未知量.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

由系数矩阵的初等行变换(高斯消元法)，求得齐次线性方程组有无穷多解，且通解为$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$，其中$x_3$为自由未知量.

由于x_3是任意的，所以可取$x_3 = 1$，则存在不全为0的系数$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 1$，使得

$$(-1)\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0.$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

由系数矩阵的初等行变换(高斯消元法)，求得齐次线性方程组有无穷多解，且通解为$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$，其中$x_3$为自由未知量.

由于x_3是任意的，所以可取$x_3 = 1$，则存在不全为0的系数$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 1$，使得

$$(-1)\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0.$$

R^4中的向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$与$\beta_1, \beta_2, \beta_3$的区别在于：

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

由系数矩阵的初等行变换(高斯消元法)，求得齐次线性方程组有无穷多解，且通解为$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$，其中$x_3$为自由未知量.

由于x_3是任意的，所以可取$x_3 = 1$，则存在不全为0的系数$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 1$，使得

$$(-1)\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0.$$

R^4中的向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$与$\beta_1, \beta_2, \beta_3$的区别在于：要使组合$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$ 成立，必须系数全取0，

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

由系数矩阵的初等行变换(高斯消元法)，求得齐次线性方程组有无穷多解，且通解为$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$，其中$x_3$为自由未知量.

由于x_3是任意的，所以可取$x_3 = 1$，则存在不全为0的系数$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 1$，使得

$$(-1)\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0.$$

R^4中的向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$与$\beta_1, \beta_2, \beta_3$的区别在于：要使组合$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$ 成立，必须系数全取0，而使组合$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$ 成立的系数，既可以全取0，也存在不全为0的系数.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

由系数矩阵的初等行变换(高斯消元法)，求得齐次线性方程组有无穷多解，且通解为$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$，其中$x_3$为自由未知量.

由于x_3是任意的，所以可取$x_3 = 1$，则存在不全为0的系数$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 1$，使得

$$(-1)\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0.$$

R^4中的向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$与$\beta_1, \beta_2, \beta_3$的区别在于：要使组合$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$成立，必须系数全取0，而使组合$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$成立的系数，既可以全取0，也存在不全为0的系数.

这种差异，就给出向量组的线性相关和线性无关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

定义3.2 设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$是$n$维向量空间$F^n$中$m$个向量构成的向量组.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

定义3.2 设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$是$n$维向量空间$F^n$中$m$个向量构成的向量组.

若存在不全为0的系数$k_1, k_2, \ldots, k_m$，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

成立，则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关；

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

定义3.2 设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$是$n$维向量空间$F^n$中$m$个向量构成的向量组.

若存在不全为0的系数$k_1, k_2, \ldots, k_m$，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

成立，则称**向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关**；

若只有当组合系数$k_1, k_2, \ldots, k_m$全取0时，才有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

成立，

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

定义3.2 设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$是$n$维向量空间$F^n$中$m$个向量构成的向量组.

若存在不全为0的系数$k_1,k_2,\ldots,k_m$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

成立，则称**向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性相关**；

若只有当组合系数$k_1,k_2,\ldots,k_m$全取0时，才有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

成立，即不存在不全为0的系数$k_1,k_2,\ldots,k_m$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

成立，

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

定义3.2 设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$是$n$维向量空间$F^n$中$m$个向量构成的向量组.

若存在不全为0的系数$k_1, k_2, \ldots, k_m$，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

成立，则称**向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关**；

若只有当组合系数$k_1, k_2, \ldots, k_m$全取0时，才有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

成立，即不存在不全为0的系数$k_1, k_2, \ldots, k_m$，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

成立，或者说，由线性组合

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0 ,$$

必然可以得到 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$,

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

定义3.2 设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$是$n$维向量空间$F^n$中$m$个向量构成的向量组.

若存在不全为0的系数$k_1,k_2,\ldots,k_m$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

成立，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性相关；

若只有当组合系数$k_1,k_2,\ldots,k_m$全取0时，才有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

成立，即不存在不全为0的系数$k_1,k_2,\ldots,k_m$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

成立，或者说，由线性组合

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0,$$

必然可以得到 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$，

则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性无关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

前例中的4维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是线性无关的，$\beta_1, \beta_2, \beta_3$是线性相关的.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

前例中的4维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性无关的，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$是线性相关的.

判断n维向量空间F^n中的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$是否线性相关，本质上就是判断齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$$

是否有非零解(非平凡解).

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

前例中的4维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是线性无关的，$\beta_1, \beta_2, \beta_3$是线性相关的.

判断n维向量空间F^n中的向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$是否线性相关，本质上就是判断齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = 0$$

是否有非零解(非平凡解).

若存在非零解，则$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$是线性相关的；

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

前例中的4维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性无关的，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$是线性相关的.

判断n维向量空间F^n中的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$是否线性相关，本质上就是判断齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$$

是否有非零解(非平凡解).

若存在非零解，则$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$是线性相关的；

若只有零解（不存在非零解），则$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 是线性无关的.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

判断n维向量空间F^n中给定的向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是否线性相关的步骤是：

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

判断n维向量空间F^n中给定的向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是否线性相关的步骤是：

(1) 写出以向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$为列向量组的矩阵$A$；

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

判断n维向量空间F^n中给定的向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是否线性相关的步骤是：

(1) 写出以向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$为列向量组的矩阵$A$；

(2) 对A实施初等行变换，化A为阶梯形；

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

判断n维向量空间F^n中给定的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 是否线性相关的步骤是：

(1) 写出以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$为列向量组的矩阵$A$；

(2) 对A实施初等行变换，化A为阶梯形；

(3) 判断.若所得阶梯形矩阵的主元个数等于向量个数，则向量组线性无关；若所得阶梯形矩阵的主元个数小于向量个数，则向量组线性相关.

例3.2 判断下列向量组是线性相关还是线性无关.

$$(1)\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\4\\1\\2\end{pmatrix};$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列向量组构作矩阵，并对其进行初等行变换，化其为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

解 以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$为列向量组构作矩阵，并对其进行初等行变换，化其为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

解 以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$为列向量组构作矩阵，并对其进行初等行变换，化其为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 10 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列向量组构作矩阵，并对其进行初等行变换，化其为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & 1 \\ & & \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列向量组构作矩阵，并对其进行初等行变换，化其为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列向量组构作矩阵，并对其进行初等行变换，化其为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列向量组构作矩阵，并对其进行初等行变换，化其为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & 10 \\ & & \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列向量组构作矩阵，并对其进行初等行变换，化其为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

解 以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$为列向量组构作矩阵，并对其进行初等行变换，化其为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ & & \\ & & \end{matrix}\right.$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

解 以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$为列向量组构作矩阵，并对其进行初等行变换，化其为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 19 \\ & & \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列向量组构作矩阵，并对其进行初等行变换，化其为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列向量组构作矩阵，并对其进行初等行变换，化其为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ & & \\ & & \end{matrix} \right.$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

解 以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$为列向量组构作矩阵，并对其进行初等行变换，化其为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ & & \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列向量组构作矩阵，并对其进行初等行变换，化其为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列向量组构作矩阵，并对其进行初等行变换，化其为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中非零行个数(主元个数)等于向量个数(其对应的齐次线性方程组只有零解)，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

$$(2)\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\4\\-2\\5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-5\\0\\-3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}5\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\\5\end{pmatrix};$$

解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列向量组构作矩阵，并对其进行初等行变换，化其为阶梯形

$$\begin{pmatrix}3&2&5&3\\4&-5&0&3\\-2&0&-1&-3\\5&-3&2&5\end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

$$(2)\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\4\\-2\\5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-5\\0\\-3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}5\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\\5\end{pmatrix};$$

解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列向量组构作矩阵，并对其进行初等行变换，化其为阶梯形

$$\begin{pmatrix}3&2&5&3\\4&-5&0&3\\-2&0&-1&-3\\5&-3&2&5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&4&0\\&&&\\&&&\\&&&\end{pmatrix}$$

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

(2)$\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\4\\-2\\5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-5\\0\\-3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}5\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\\5\end{pmatrix}$;

解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列向量组构作矩阵，并对其进行初等行变换，化其为阶梯形

$$\begin{pmatrix}3&2&5&3\\4&-5&0&3\\-2&0&-1&-3\\5&-3&2&5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&4&0\\4&-5&0&3\\-2&0&-1&-3\\5&-3&2&5\end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

(2)$\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\4\\-2\\5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-5\\0\\-3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}5\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\\5\end{pmatrix}$;

解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列向量组构作矩阵，并对其进行初等行变换，化其为阶梯形

$$\begin{pmatrix}3&2&5&3\\4&-5&0&3\\-2&0&-1&-3\\5&-3&2&5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&4&0\\4&-5&0&3\\-2&0&-1&-3\\5&-3&2&5\end{pmatrix}\longrightarrow$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -13 & -16 & 3 \\ & & & \\ & & & \end{matrix}\right.$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -13 & -16 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & -3 \\ & & & \end{array}\right.$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -13 & -16 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & -13 & -18 & 5 \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -13 & -16 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & -13 & -18 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \right.$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -13 & -16 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & -13 & -18 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -13 & -16 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & -13 & -18 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & -13 & -18 & 5 \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -13 & -16 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & -13 & -18 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & -13 & -18 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \right.$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -13 & -16 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & -13 & -18 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & -13 & -18 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 27 & -27 \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -13 & -16 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & -13 & -18 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & -13 & -18 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 27 & -27 \\ 0 & 0 & -83 & 83 \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 0\\ 0 & -13 & -16 & 3\\ 0 & 4 & 7 & -3\\ 0 & -13 & -18 & 5\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 0\\ 0 & -1 & 5 & -6\\ 0 & 4 & 7 & -3\\ 0 & -13 & -18 & 5\end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 0\\ 0 & -1 & 5 & -6\\ 0 & 0 & 27 & -27\\ 0 & 0 & -83 & 83\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 0\\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -13 & -16 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & -13 & -18 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & -13 & -18 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 27 & -27 \\ 0 & 0 & -83 & 83 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -13 & -16 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & -13 & -18 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & -13 & -18 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 27 & -27 \\ 0 & 0 & -83 & 83 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -13 & -16 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & -13 & -18 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & -13 & -18 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 27 & -27 \\ 0 & 0 & -83 & 83 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -13 & -16 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & -13 & -18 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & -13 & -18 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 27 & -27 \\ 0 & 0 & -83 & 83 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中非零行个数(主元个数)小于向量个数(其对应的齐次线性方程组有非零解)，所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性相关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

再给几个例子:

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

再给几个例子:

(1) 包含零向量的向量组一定是线性相关的.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

再给几个例子:

(1) 包含零向量的向量组一定是线性相关的.

因为只要将0向量的系数取作1，其余向量的系数均取作0，其组合即为0向量.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

再给几个例子:

(1) 包含零向量的向量组一定是线性相关的.

因为只要将0向量的系数取作1，其余向量的系数均取作0，其组合即为0向量.

即，存在不全为0的系数(0向量的系数为1)，使得其组合为0 ，所以它线性相关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

再给几个例子:

(1) 包含零向量的向量组一定是线性相关的.

因为只要将0向量的系数取作1，其余向量的系数均取作0，其组合即为0向量.

即，存在不全为0的系数(0向量的系数为1)，使得其组合为0 ，所以它线性相关.

(2) 单个向量α组成的向量组线性相关

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

再给几个例子:

(1) 包含零向量的向量组一定是线性相关的.

因为只要将0向量的系数取作1，其余向量的系数均取作0，其组合即为0向量.

即，存在不全为0的系数(0向量的系数为1)，使得其组合为0 ，所以它线性相关.

(2) 单个向量α组成的向量组线性相关$\Leftrightarrow$存在系数$k \neq 0$，使得$k\alpha = 0$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

再给几个例子:

(1) 包含零向量的向量组一定是线性相关的.

因为只要将0向量的系数取作1，其余向量的系数均取作0，其组合即为0向量.

即，存在不全为0的系数(0向量的系数为1)，使得其组合为0 ，所以它线性相关.

(2) 单个向量α组成的向量组线性相关$\Leftrightarrow$存在系数$k \neq 0$，使得$k\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

再给几个例子:

(1) 包含零向量的向量组一定是线性相关的.

因为只要将0向量的系数取作1，其余向量的系数均取作0，其组合即为0向量.

即，存在不全为0的系数(0向量的系数为1)，使得其组合为0 ，所以它线性相关.

(2) 单个向量α组成的向量组线性相关$\Leftrightarrow$存在系数$k \neq 0$，使得$k\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

即：单个向量α线性相关$\Leftrightarrow \alpha = 0$ ；

单个向量α 线性无关$\Leftrightarrow \alpha \neq 0$.

(3) 两个向量构成的向量组线性相关$\Leftrightarrow$它们的分量对应成比例.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

例如：设$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$，则

$$\alpha_1, \alpha_2 \text{线性相关} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{1} = \frac{2}{b}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

例如：设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\a\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\b\end{pmatrix}$，则

$$\alpha_1,\alpha_2\text{线性相关}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{a}{1}=\frac{2}{b}\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}\text{且}b=4.$$

(4)向量组中若有两个向量相同，则其一定线性相关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

例如：设$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$，则

$$\alpha_1, \alpha_2\text{线性相关} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{1} = \frac{2}{b} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}\text{且}b = 4.$$

(4)向量组中若有两个向量相同，则其一定线性相关.

因为在向量组的线性组合中，将两个相同的向量的系数分别取1和(-1)，其余的向量的系数都取0，则其线性组合为零且系数不全为0.

3.3 向量组的线性相关与线性无关

(5)设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是m个n维向量的向量组.若$m > n$，即向量组的向量个数多于维数，则其一定线性相关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关

(5)设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是m个n维向量的向量组.若$m > n$，即向量组的向量个数多于维数，则其一定线性相关. 因为

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = 0$$

是未知量个数m多于方程个数n的齐次线性方程组，一定有非零解.

3.3 向量组的线性相关与线性无关

(5)设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 是m个n维向量的向量组.若$m>n$，即向量组的向量个数多于维数，则其一定线性相关. 因为

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$$

是未知量个数m多于方程个数n的齐次线性方程组，一定有非零解.

设ε_k为第k个分量为1，其余分量全为0的n维向量，即

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\varepsilon_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix},$$

称为F^n的规范单位向量组，也称为标准单位向量组.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

由于对任意的数$k_1, k_2, ..., k_n$ ，都有

$$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n =$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

由于对任意的数$k_1, k_2, ..., k_n$ ，都有

$$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n = k_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+k_n\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} =$$

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

由于对任意的数$k_1, k_2, ..., k_n$，都有

$$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n = k_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+k_n\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix},$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

由于对任意的数$k_1, k_2, ..., k_n$，都有

$$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n = k_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+k_n\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix},$$

所以

$$k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n = 0$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

由于对任意的数$k_1, k_2, ..., k_n$，都有

$$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n = k_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+k_n\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix},$$

所以

$$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=0$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

由于对任意的数$k_1, k_2, ..., k_n$，都有

$$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n = k_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+k_n\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix},$$

所以

$$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}k_1=0\\k_2=0\\\vdots\\k_n=0\end{cases}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

即，

F^n中的规范单位向量组$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$是线性无关的.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

即，

F^n中的规范单位向量组$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$是线性无关的.

对任意的向量$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，都有

$$a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n =$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

即，

F^n中的规范单位向量组$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$是线性无关的.

对任意的向量$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，都有

$$a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \alpha,$$

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

综上，有

(6)F^n中规范单位向量组$\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$是线性无关的，

且任意的$\alpha\in F^n$，α都可以由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$线性表出，且系数就是$\alpha$相应的分量.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(1)

综上，有

(6)F^n中规范单位向量组$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$是线性无关的，且任意的$\alpha \in F^n$，$\alpha$都可以由$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$线性表出，且系数就是$\alpha$相应的分量.

需要进一步探讨的问题：F^n中的向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$满足什么条件，才可以使$F^n$ 中任意的向量β都可以由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性表出？

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com